A note on Non-Abelian Gauge theory

University of the Ryukyus

May 20, 2023

Non-Abelian Gauge theory

ここでは変換が時空間ごとに異なる場合について考えていく．つまりユニタリ変換が時空の関数として表される場合である．

$$U = U(x)$$

このとき $\varphi^\dagger\varphi$ はこの変換に対して不変である. なぜなら

$$\begin{aligned}\varphi^\dagger\varphi &\to (U\varphi)^\dagger (U\varphi)\\ &= \varphi^\dagger U^\dagger U\varphi\\ &= \varphi^\dagger\varphi\end{aligned}$$

しかし

$$\begin{aligned}\partial_\mu\varphi \to \partial_\mu(U\varphi) &= \partial_\mu U\varphi + U\partial_\mu\varphi\\ &= U\left(\partial_\mu\varphi + U^\dagger\partial_\mu U\varphi\right)\end{aligned}$$

ゆえに $\partial_\mu\varphi^\dagger\partial^\mu\varphi$ はもはや不変ではなく, $D_\mu := \partial_\mu + U^\dagger\partial_\mu U$ として初めて $D_\mu\varphi^\dagger D^\mu\varphi$ が不変となる. 電磁気学での文脈で書くならば

$$D_\mu\varphi(x) = \partial_\mu\varphi(x) - iA_\mu(x)\varphi(x) \tag{1}$$

であって、上の変換で

$$A_\mu \to UA_\mu U^\dagger - i\left(\partial_\mu U\right)U^\dagger \tag{2}$$

として $D_\mu\varphi \to UD_\mu\varphi$ なる変換となる. これは (1) を変換した時に (2) を代入しても得られるが、まずは A_μ がどのように変換されるべきか知らないと思って示したい. まずはゲージ変換のもと $A_\mu \to A'_\mu$ と変換されたとして

$$\begin{aligned}D_\mu\varphi &= \partial_\mu\varphi - iA_\mu\varphi\\ &\to \partial_\mu(U\varphi) - iA'_\mu(U\varphi)\\ &= \partial_\mu U\varphi + U\partial_\mu\varphi - iA'_\mu U\varphi\end{aligned}$$

この一番下の式が $UD_\mu\varphi$ であればよいのだから

$$\begin{aligned}&\partial_\mu U\varphi + U\partial_\mu\varphi - iA'_\mu U\varphi = U\partial_\mu\varphi - iUA_\mu\varphi\\ \Rightarrow &- iA'_\mu U = -\partial_\mu U - iUA_\mu\\ \Rightarrow &A'_\mu = -i(\partial_\mu U)U^\dagger + UA_\mu U^\dagger\end{aligned}$$

以上にて A_μ がどのように変換されるべきか示された.

ここでこの変換が十分に小さい場合を考える． ユニタリ行列 U はエルミート行列 T をつかって $U = e^{i\theta^a T^a}$ と書けるのでった. ただし T^a は $\mathfrak{su}(N)$ の生成子であって $N^2 - 1$ 個からなる. 無限小変換であるのだから一次近似にて

$$U = e^{i\theta^a T^a} \sim 1 + i\theta^a T^a$$

であるのだから

$$\begin{aligned}A_\mu &\to UA_\mu U^\dagger - i\left(\partial_\mu U\right)U^\dagger \\ &= (1+i\theta T)A_\mu(1-i\theta T) - i\left\{\partial_\mu(1+i\theta T)\right\}(1-i\theta T) \\ &= A_\mu + i\theta\left[T, A_\mu\right] + \partial_\mu\theta T(1-i\theta T) \\ &= A_\mu + i\theta\left[T, A_\mu\right] + \partial_\mu\theta T\end{aligned}$$

ただし 2 次以上は無視しており、$\theta^a T^a = \theta T$ と省略している. よって無限小変換に対して A_μ は

$$A_\mu \to A_\mu + i\theta^a\left[T^a, A_\mu\right] + \partial_\mu\theta^a T^a$$

と変換されるのであるが、Lie 代数の構造定数 f をもちいて

$$A_\mu^a \to A_\mu^a - f^{abc}\theta^b A_\mu^c + \partial_\mu\theta^a$$

と表すことができる. 構造定数とは、例えば $\mathfrak{su}(2)$ の場合、トレースレスなエルミートの生成元として以下の基底 (パウリ行列)

$$T' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad T^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad T^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

を選ぶことができる. これらの交換関係は量子力学で学んだように

$$\begin{array}{lll} \left[T^1, T^1\right] = 0 & \left[T^1, T^2\right] = 2iT^3 & \left[T^1, T^3\right] = -2iT^2 \\ \left[T^2, T^1\right] = -2iT^3 & \left[T^2, T^2\right] = 0 & \left[T^2, T^3\right] = 2iT^1 \\ \left[T^3, T^1\right] = 2iT^2 & \left[T^3, T^2\right] = -2iT^1 & \left[T^3, T^3\right] = 0 \end{array}$$

この関係と、構造定数の定義

$$\left[T^a, T^b\right] = i\sum f^{abc}T^c$$

より生成子を適当に規格化すれば、完全反対象テンソル $f^{abc} = \varepsilon^{abc}$ となる. よって改めて $\mathfrak{su}(2)$ のとき

$$A_\mu^a \to A_\mu^a - \varepsilon^{abc}\theta^b A_\mu^c + \partial_\mu\theta^a$$

と書くことができる. これはまさにクロス積を意味するのであるが、それは Lie 以下の非自明な Lie 代数の同型による.

$$\mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{o}(3)$$

$\mathfrak{su}(2)$ の構造は 3 次元の無限小回転と等価ということである.

0.1 $\mathfrak{o}(3)$ の随伴表現

$\mathfrak{o}(3)$ の随伴表現の例を記載したい. まず直交 Lie 代数の定義は

$$\mathfrak{o}(n) = \left\{M \in M(n, c) \mid M^t = -M\right\}$$

であり、括弧積で演算が閉じている. すなわち Lie 代数をなす. $n = 3$ のとき任意の元 X は

$$X = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_2 \\ -x_1 & 0 & x_3 \\ -x_2 & -x_3 & 0 \end{pmatrix}$$

と 3 つの反対称行列の線型結合で書くことができる. ここで $\mathfrak{o}(3)$ の随伴表現とは $X, Y \in \mathfrak{o}(3)$ に対して

$$[X, Y] = \mathrm{ad}(X)Y$$

である表現である. これは具体的に求めることができる. ここでは X, Y を以下

$$X = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_2 \\ -x_1 & 0 & x_3 \\ -x_2 & -x_3 & 0 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & y_1 & y_2 \\ -y_1 & 0 & y_3 \\ -y_2 & -y_3 & 0 \end{pmatrix}$$

のように書くと、この括弧積 $[X,Y]$ は

$$\begin{aligned}[X,Y] &= \begin{pmatrix} 0 & x_3y_2 - x_2y_3 & x_1y_3 - x_3y_1 \\ x_2y_3 - x_3y_2 & 0 & x_2y_1 - x_1y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 & x_1y_2 - x_2y_1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & x_3 & -x_2 \\ -x_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & -x_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

と書くことができる. よって随伴表現 $ad(X)$ は

$$ad(x) = \begin{pmatrix} 0 & x_3 & -x_2 \\ -x_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & -x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

と求めることができる.

1 場の力 $F_{\mu\nu}$ の導出

ゲージ変換に対して不変のラグランジアンは上で定義した D_μ を用いて

$$\mathcal{L} = (D_\mu\varphi)^\dagger (D^\mu\varphi) - V\left(\varphi^\dagger\varphi\right)$$

であることが容易にわかる. これから簡単のため $A_\mu^M \equiv -iA_\mu^P$ として $D_\mu = \partial_\mu + A_\mu$ を用いていきたい.

今から行いたいのは $F_{\mu\nu}$ の導出である. まず表記として以下を定義する.

$$A = A_\mu dx^\mu \quad A^2 = A_\mu A_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu$$

ただしウェッジ積は

$$dx^\mu \wedge dx^\nu = -dx^\nu \wedge dx^\mu$$

前に書いたように A の Gauge 変換は

$$A \to UAU^\dagger + UdU^\dagger$$

とすればよかったのであった. この意味は定義で書いたように

$$= \left(UA_\mu U^\dagger + U\partial_\mu U^\dagger\right) dx^\mu$$

である. これより dA は

$$dA \to dUAU^\dagger + UdAU^\dagger - UAdU^\dagger + dUdU^\dagger \tag{3}$$

と変換される. さてここで気をつけなければならない点が 2 点ある. 一つは

$$\begin{aligned}d^2U^\dagger &= \partial_\mu\partial_\nu U^\dagger dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &= -\partial_\mu\partial_\nu U^\dagger dx^\nu \wedge dx^\mu \\ &= -\partial_v\partial_\mu U^\dagger dx^\nu \wedge dx^\mu \\ &= -\partial_\mu\partial_\nu U^\dagger dx^\mu \wedge dx^\nu\end{aligned}$$

ゆえに

$$d^2U^\dagger = 0$$

もう一つは以下の計算の過程

$$\begin{aligned}
d(UAU^\dagger) &= \partial_\mu \left(UA_\nu U^\dagger\right) dx^\mu \wedge dx^\nu \\
&= \left(\partial_\mu UA_\nu U^\dagger + U\partial_\mu A_\nu U^\dagger + UA_\nu \partial_\mu U^\dagger\right) dx^\mu \wedge dx^\nu
\end{aligned}$$

の第三項の添字の順番が入れ替わってしまっていることである. これは正しく並び替えようとすると符号が現れる. 実際

$$\begin{aligned}
(3rd) &= UA_\nu \partial_\mu U^\dagger dx^\mu \wedge dx^\nu \\
&= -UA_\nu \partial_\mu U^\dagger dx^\nu \wedge dx^\mu \\
&= -UA_\mu \partial_\nu U^\dagger dx^\mu \wedge dx^\nu \\
&= -UAdU^\dagger
\end{aligned}$$

よって式 (3) の三項に符号が現れるのである. また A^2 は

$$\begin{aligned}
A^2 &\to \left(UAU^\dagger + UdU^\dagger\right)^2 \\
&= UA^2U^\dagger + UAdU^\dagger + UdU^\dagger UAU^\dagger + UdU^\dagger UdU^\dagger
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
U^\dagger U = 1 &\Rightarrow d\left(U^\dagger U\right) = 0 \\
&\Rightarrow dU^\dagger U = -U^\dagger dU
\end{aligned}$$

にて

$$A^2 \to UA^2U^\dagger + UAdU^\dagger - dUAU^\dagger - dUdU^\dagger \tag{4}$$

と最終的に Gauge 変換される. さてここで式 (3),(4) を足してみると驚くべき簡潔さで

$$A^2 + dA \to U\left(A^2 + dA\right)U^\dagger \tag{5}$$

と変換されることがわかる. つまり $A^2 + dA$ は Gauge 変換で不変でないものの、いい感じに変換されることを意味する. これに対してトレースをとればトレースの巡回性より Gauge 不変となることがわかる.

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\left(A^2 + dA\right) &\to \mathrm{tr}\left(U\left(A^2 + dA\right)U^\dagger\right) \\
&= \mathrm{tr}\left(A^2 + dA\right)
\end{aligned} \tag{6}$$

ここでもう少し馴染みのある形に変形したい. ウェッジ積の定義のもと

$$\begin{aligned}
A^2 + dA &= \left(A_\mu A_\nu + \partial_\mu A_\nu\right) dx^\mu \wedge dx^\nu \\
&= \frac{1}{2}\left([A_\mu, A_\nu] + \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right) dx^\mu \wedge dx^\nu \\
&\equiv \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu
\end{aligned}$$

これより目的であった

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \tag{7}$$

を得る. ここで $F_{\mu\nu}$ を Lie 代数で分解する.

$$F_{\mu\nu} = F^a_{\mu\nu} T^a$$

この a は Lie 代数の生成元の個数だけ和を取ることを意味し,T^a は Lie 代数の生成元である. 上にも書いたよう $\mathfrak{su}(n)$ であれば $n^2 - 1$ 個の和である. これによって構造定数を用いて簡潔に書くことができ

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu \tag{8}$$

となる. 特に $\mathfrak{su}(2)$ の場合 $\mathfrak{o}(3)$ と同型であることから、クロス積が生じる.

$$\vec{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{A}_\nu - \partial_\nu \vec{A}_\mu + \vec{A}_\mu \times \vec{A}_\nu \tag{9}$$

1.1 余談: A^3 などはどうなるのであろうか

以下に注意する.

$$\begin{aligned} dx^\sigma \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu &= -dx^\mu \wedge dx^\sigma \wedge dx^\nu \\ &= dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\sigma \\ &= -dx^\nu \wedge dx^\mu \wedge dx^\sigma \end{aligned} \tag{10}$$

A^2 は

$$A^2 \to UA^2U^\dagger + UAdU^\dagger - dUAU^\dagger - dUdU^\dagger$$

と変換されることから考える. まず最初の一項に対する微分作用は

$$\begin{aligned} d\left(UA^2U^\dagger\right) &= \partial_\sigma\left(UA_\mu A_\nu U^\dagger\right)dx^\sigma \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &= \left(\partial_\sigma UA_\mu A_\nu U^\dagger + U\partial_\sigma A_\mu A_\nu U^\dagger + UA_\mu \partial_\sigma A_\nu U^\dagger + UA_\mu A_\nu \partial_\sigma U^\dagger\right)dx^\sigma \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu \end{aligned}$$

よって

$$d\left(UA^2U^\dagger\right) = dUA^2U^\dagger + UdAAU^\dagger - UAdAU^\dagger + UA^2dU^\dagger$$

となる. 第二項は

$$d\left(UAdU^\dagger\right) = dUAdU^\dagger + UdAdU^\dagger$$

第三項は

$$\begin{aligned} d\left(-dUAU^\dagger\right) &= -d^2UAU^\dagger + dUdAU^\dagger - dUAdU^\dagger \\ &= dUdAU^\dagger - dUAdU^\dagger \end{aligned}$$

そして第 4 項は 0 となる. よって

$$\boxed{\begin{aligned} &dA^2 \to dUA^2U^\dagger + UdAAU^\dagger - UAdAU^\dagger + UA^2dU^\dagger + UdAdU^\dagger + dUdAU^\dagger \\ &A^3 \to UA^3U^\dagger + UA^2dU^\dagger + UAdU^\dagger UAU^\dagger + UAdU^\dagger UdU^\dagger \\ &- dUdU^\dagger UAU^\dagger - dUdU^\dagger UdU^\dagger - dUdU^\dagger UAU^\dagger - dUdU^\dagger UdU^\dagger \end{aligned}}$$

これらより

$$\begin{aligned} A^3 - dA^2 &\to U\left(A^3 - dA\cdot A + A\cdot dA + AdU^\dagger UA\right)U^\dagger + \mathcal{O}\left(d^2\right) \\ &\sim U\left(A^3 - dA\cdot A + A\cdot dA + AdU^\dagger UA\right)U^\dagger \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} C_{\sigma\mu\nu} &\equiv A_\sigma A_\mu A_\nu - \partial_\sigma A_\mu A_\nu + A_\sigma \partial_\mu A_\nu + A_\sigma \partial_\mu U^\dagger UA_\nu \\ &= A_\sigma A_\mu A_\nu - \partial_\sigma A_\mu A_\nu + A_\sigma \partial_\mu A_\nu + \frac{1}{2}A_\sigma\left(\partial_\mu U^\dagger U - U^\dagger \partial_\mu U\right)A_\mu \end{aligned}$$

ただし 2 番目の式変形には $UU^\dagger = 1$ を用いている.$A^3 - dA^2$ 以外にも良い $C_{\sigma\mu\nu}$ の構成方法はあるか. (追記中)

2 Anderson and Higgs mechanism

ここでは非可換 Gauge 理論から、普通の Gauge 理論に一旦戻ることにする. 以下のように与えられている Lagrangian を考える

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \left(D_\mu\varphi\right)^\dagger\left(D^\mu\varphi\right) + \mu^2\varphi^\dagger\varphi - \lambda\left(\varphi^\dagger\varphi\right)^2$$

第 3 項のスカラー場の質量項の符号が反転しているのは、以前学んだ自発的対称性のやぶれ (SSB) が生じる系であることを意味しており、この不安定な状態から安定な状態へ移動した際に何が起こるかを考えていく. ここでスカラー場 φ を以下のように距離と角度に分けて考える.

$$\varphi(x) = \rho(x)e^{i\theta(x)}$$

これにたいする共変微分の作用は

$$
\begin{aligned}
D_\mu \varphi &= (\partial_\mu - ieA_\mu)\varphi \\
&= (\partial_\mu - ieA_\mu)\rho e^{i\theta} \\
&= \{\partial_\mu \rho + i\rho(\partial_\mu \theta - eA_\mu)\} e^{i\theta}
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
D_\mu \varphi^\dagger D^\mu \varphi &= (\partial_\mu \rho)^2 + \rho^2 (\partial_\mu \theta - eA_\mu)^2 \\
&= (\partial_\mu \rho)^2 + e^2\rho^2 \left(A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu \theta\right)^2
\end{aligned}
$$

ここで B_μ を

$$B_\mu \equiv A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu \theta$$

と定義すると

$$
\begin{aligned}
F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \\
&= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu
\end{aligned}
$$

であって

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \rho)^2 + \mu^2\rho^2 - \lambda\rho^4 + \rho^2 e^2 B_\mu^2 - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

今ここでポテンシャルの安定点へ場をシフトする.

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} + \chi(x)\right)$$

これによって

$$
\begin{aligned}
(\partial_\mu \rho)^2 &= \frac{1}{2}(\partial_\mu \chi)^2 \\
\rho^2 &= \frac{1}{2}\left(\frac{\mu^2}{\lambda} + 2\frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}\chi + \chi^2\right) \\
\rho^4 &= \frac{1}{4}\left(\frac{\mu^4}{\lambda^2} + 4\frac{\mu^3}{\lambda^{3/2}}\chi + 6\frac{\mu^2}{\lambda}\chi^2 + 4\frac{\mu}{\lambda^{1/2}}\chi^3 + \chi^4\right)
\end{aligned}
$$

より代入して

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \chi)^2 &+ \left(\frac{\mu^4}{2\lambda} + \frac{\mu^3}{\sqrt{\lambda}}\chi + \frac{\mu^2\chi^2}{2}\right) \\
&+ \left(-\frac{\mu^4}{4\lambda} - \frac{\mu^3}{\sqrt{\lambda}}\chi - \frac{3\mu^2}{2}\chi^2 - \sqrt{\lambda}\mu\chi^3 - \frac{\lambda\chi^4}{4}\right) \\
&+ \left(\frac{e^2\mu^2}{2\lambda} + \frac{e^2\mu}{\sqrt{\lambda}}\chi + \frac{e^2\chi^2}{2}\right)B_\mu^2 \\
&- \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}
\end{aligned}
$$

適当に整理して

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{e^2\mu^2}{2\lambda}B_\mu^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \chi)^2 - \mu^2\chi^2 + \mathcal{O}$$

これより自発的対称性のやぶれによって $B_\mu(A_\mu), \chi$ が massive な場となったことに対して、θ は massless の場になったことがわかる. 以下念の為 B_μ^2 の項の計算

$$
\begin{aligned}
\left(B_\mu^2 \text{ term }\right) &= \frac{e^2\mu^2}{2\lambda}B_\mu^2 \\
&= \frac{e^2\mu^2}{2\lambda}\left(A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\theta\right)\left(A^\mu - \frac{1}{e}\partial^\mu\theta\right) \\
&= \frac{e^2\mu^2}{2\lambda}\left(A_\mu^2 - \frac{2}{e}A_\mu\partial^\mu\theta + \frac{1}{e^2}\partial_\mu\theta\partial^\mu\theta\right) \\
&= \frac{e^2\mu^2}{2\lambda}A_\mu^2 - \frac{e\mu^2}{\lambda}A_\mu\partial^\mu\theta + \frac{\mu^2}{2\lambda}(\partial_\mu\theta)^2
\end{aligned}
$$

Maxwell の Lagrangian は

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^\mu + \frac{1}{2}m^2A_\mu A^\mu$$

であったが質量項がスカラー場とは符号が逆であることに注意する.

自発的対称性の破れによって massless の Gauge 場から (スカラー場を食べて)massive の Gauge 場になったことは、非常に興味深いことである.

3 Appendix

個人的には 24 個の生成元をもつ $\mathfrak{su}(5)$ の構造に興味がある. もしくは $\mathfrak{su}(7), \mathfrak{su}(11)$ など生成元が 24 の倍数になるもの.

4 課題

(1) ルート系の文脈で非可換ゲージ場を理解したい.
(2) 物理的にどのような意味があるのか考察したい.
(3) 大きい n で $\mathfrak{su}(n)$ は部分代数として $\mathfrak{su}(2), \mathfrak{su}(3)$ を含んでいる. つまりそのゲージ変換で不変な Lagrangian は $n = 2, 3$ を包括しているはずである. 大きな n 特有の物理的な現象を考察したい.(それは群そのものを考察することに等しく思えるが...)
(4) 例外 Lie 代数が作用するゲージ変換はなにか. 一番小さいもので G_2 があるが、その Lagrangian はどのような物理を記述するか.

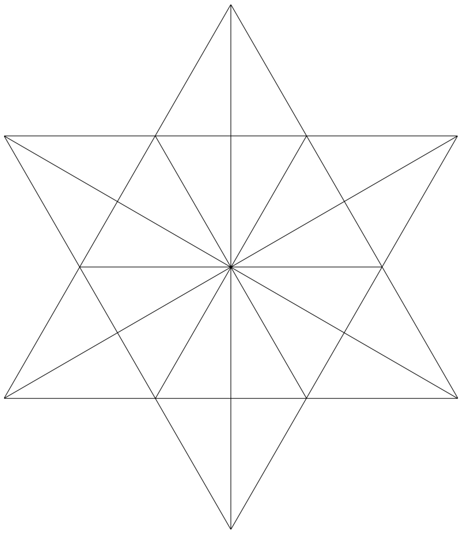

Figure 1: G_2