1 Notes

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + G\frac{Mm}{x} \\
&\rightarrow \frac{1}{2}m(\dot{x}+\dot{\varepsilon})^2 + G\frac{Mm}{x+\varepsilon} \\
&\sim \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{\varepsilon}\right) + G\frac{Mmx^{-1}}{1+\frac{\varepsilon}{x}} \\
&\sim \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{\varepsilon}\right) + G\frac{Mm}{x}\left(1-\frac{\varepsilon}{x}\right) \\
&= L + m\dot{x}\dot{\varepsilon} - G\frac{M_m}{x^2}\varepsilon \\
&\rightarrow L - m\ddot{x}\varepsilon - G\frac{Mm}{x^2}\varepsilon
\end{aligned}
$$

これが $\delta L = 0$ であるためには

$$
m\ddot{x} = -G\frac{Mm}{x^2}
$$

今この微分方程式を解きたい. 両辺に dx/dt をかけて

$$
m\frac{dx(t)}{dt}\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -GMm\frac{dx}{dt}\frac{1}{x(t)^2}
$$

t について積分し

$$
m\int dt\frac{dx(t)}{dt}\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -GMm\int dt\frac{dx(t)}{dt}\frac{1}{x(t)^2}
$$

左辺の積分は

$$
\begin{aligned}
m\int dt\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{m}{2}\int dt\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right] \\
&= \frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2
\end{aligned}
$$

であるから

$$
\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{GM}{x} + c_1
$$

dx/dt についてとき

$$
\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2GM}{x} + c_2}
$$

変形して積分し

$$
\int \frac{\pm dx}{\sqrt{\frac{2GM}{x} + c_2}} = \int dt
$$

すなわち

$$
\pm\int_{x(t_0)}^{x(t_1)} \frac{\zeta d\zeta}{\sqrt{2GM + a_1\zeta}} = t + a_2
$$

2 Notes.2

2 次元極座標変換は

$$
\begin{cases}
x = r\cos\theta \\
y = r\sin\theta
\end{cases}
$$

であった. 全微分により

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \end{pmatrix}$$

今 r の時間依存性がないとして

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -r\dot{\theta}\sin\theta \\ \frac{dy}{dt} = r\dot{\theta}\cos\theta \end{cases}$$

これより x 方向のラグランジアンは

$$L_x = \frac{1}{2}m(-r\dot{\theta}\sin\theta)^2 + \frac{GMm}{r\cos\theta}$$

これより変分は

$$L_x \to \frac{1}{2}mr^2(\dot{\theta}+\dot{\varepsilon})^2\sin^2(\theta+\varepsilon) + \frac{GMm}{r\cos(\theta+\varepsilon)} \quad (\theta \to \theta+\varepsilon)$$

ここで加法定理と Taylor 展開による一次近似より

$$\begin{aligned} \cos(\theta+\varepsilon) &= \cos\theta\cos\varepsilon - \sin\theta\sin\varepsilon \\ &\sim \cos\theta - \varepsilon\sin\theta \\ \sin(\theta+\varepsilon) &= \sin\theta\cos\varepsilon + \cos\theta\sin\varepsilon \\ &\sim \sin\theta + \varepsilon\cos\theta \end{aligned}$$

であるから

$$L_x \to \frac{1}{2}mr^2\left(\dot{\theta}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\varepsilon}\right)\left(\sin^2\theta + 2\varepsilon\sin\theta\cos\theta\right) + \frac{GMm}{r(\cos\theta - \varepsilon\sin\theta)}$$

となる. 展開ののち二次のこうを落として

$$\sim \frac{1}{2}mr^2\left(\dot{\theta}^2\sin^2\theta + 2\varepsilon\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta + 2\dot{\theta}\dot{\varepsilon}\sin^2\theta\right) + \frac{GMm}{r\cos\theta}\left(1 + \varepsilon\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right).$$

ただし途中で以下の展開を用いた.

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\cos\theta - \varepsilon\sin\theta)} &= \frac{1}{\cos\theta\left(1 - \varepsilon\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)} \\ &= \frac{1}{\cos\theta}\left(1 + \varepsilon\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \varepsilon^2\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \dots\right) \end{aligned}$$

ここで

$$\partial_0(\dot{\theta}\varepsilon\sin^2\theta) = \ddot{\theta}\varepsilon\sin^2\theta + \dot{\theta}\dot{\varepsilon}\sin^2\theta + 2\dot{\theta}^2\varepsilon\sin\theta\cos\theta$$

より

$$\dot{\theta}\dot{\varepsilon}\sin^2\theta = \partial_0\left(\dot{\theta}\varepsilon\sin^2\theta\right) - \ddot{\theta}\varepsilon\sin^2\theta - 2\dot{\theta}^2\varepsilon\sin\theta\cos\theta$$

を代入して部分積分の項を落として

$$\sim \frac{1}{2}mr^2\left(\dot{\theta}^2\sin^2\theta - \ddot{\theta}\varepsilon\sin^2\theta\right) + \frac{GMm}{r\cos\theta}\left(1 + \varepsilon\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)$$

となる. これより変化分は

$$\delta L_x = \left(-\frac{1}{2}mr^2\ddot{\theta}\sin^2\theta + \frac{GMm\sin\theta}{r\cos^2\theta}\right)\varepsilon$$

これより得られる運動方程式は

$$\frac{1}{2}mr\ddot{\theta}\sin^2\theta = \frac{GMm\sin\theta}{r^2\cos^2\theta}$$