Dimensional regularization(A.Zee 3-1-Appendix 2)

以下の積分について

$$I = \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \frac{1}{\left(k^2 - c^2 + i\varepsilon\right)^2}$$

次の等式を示したい

$$\boxed{\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \frac{1}{\left(k^2 - c^2 + i\varepsilon\right)^2} = i \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma\left(\frac{4-d}{2}\right) c^{d-4}}$$

先ず Wick 回転にてユークリッド化を行う.

$$= \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \int dk^0 \frac{1}{\left\{\left(k^0\right)^2 - \vec{k}^2 - c^2 + i\varepsilon\right\}^2}$$

$$\equiv \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \int dk^0 \frac{1}{\left\{\left(k^0\right)^2 - \omega^2 + i\varepsilon\right\}^2}$$

この k^0 の積分は以下のように極をまたぎ、Cauchy の積分定理より

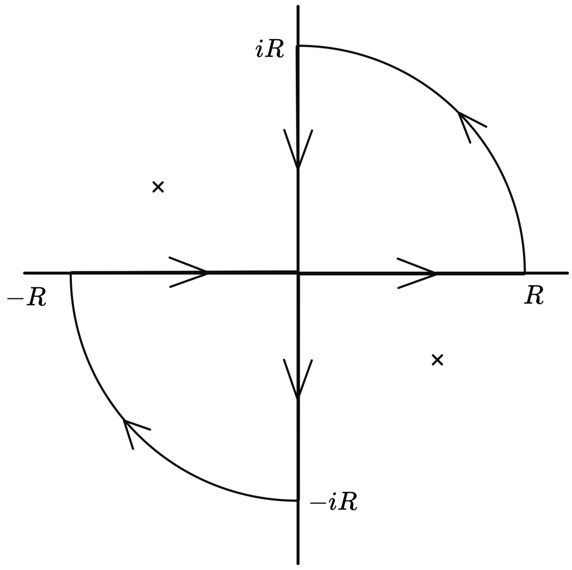

Figure 1: 積分路

$$\int_{-R}^{R} dx \frac{1}{\left(x^2 - \omega^2 + i\varepsilon\right)^2} + \int_{iR}^{-iR} dx \frac{1}{\left(x^2 - \omega^2 + i\varepsilon\right)^2} = 0$$

$R \to \infty$ にて

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1}{\left(x^2 - \omega^2 + i\varepsilon\right)^2} = \int_{-i\infty}^{+i\infty} dx \frac{1}{\left(x^2 - \omega^2 + i\varepsilon\right)^2}$$

右辺に対して $x'=-ix$ として

$$
\begin{aligned}
&= i\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1}{\left((ix)^2-\omega^2+i\varepsilon\right)^2} \\
&= i\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1}{\left(-x^2-\omega^2+i\varepsilon\right)^2} \\
&\to i\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1}{\left(x^2+\omega^2\right)^2} \quad (\varepsilon\to 0)
\end{aligned}
$$

よって

$$
\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{1}{(k^\mu k_\mu - c^2 + i\varepsilon)^2} = i\int \frac{d^d_E k}{(2\pi)^d}\frac{1}{\left(|\vec{k}|^2+c^2\right)^2}
$$

d 元内積とユークリッド内積を区別するために、あえて露に d 元内積を $k^\mu k_\mu$ と書いている. ユークリッド化が完了したので、あとは d 次元極座標変換を行えば良い. d 次元極座標変換の一般式とそれに伴うヤコビヤンは公式として存在するが、ここでは A.Zee 先生の付録記載の方法でヤコビヤンを求めたい.

極座標変換に伴うヤコビヤンはどの被積分関数に対しても一意的であるため、$e^{-k^2/2}$ としてよい. 今極座標変換によって左辺から右辺になったとする.

$$
\int d^d_E k e^{-\frac{1}{2}k^2} = C(d)\int_0^\infty dr r^{d-1} e^{-\frac{1}{2}r^2}
$$

Gauss 積分の公式より左辺は

$$
(2\pi)^{\frac{d}{2}} = C(d)\int_0^\infty dr r^{d-1} e^{-\frac{1}{2}r^2}
$$

変数変換 $x=\frac{r^2}{2}$ $\left(dr=\frac{dx}{\sqrt{2x}}\right)$ を行い

$$
\begin{aligned}
&= C(d)2^{\frac{d}{2}-1}\int_0^\infty dx x^{\frac{d}{2}-1}e^{-x} \\
&= C(d)2^{\frac{d}{2}-1}\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)
\end{aligned}
$$

よって

$$
C(d) = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}
$$

であるから、一般的な関数にたいして

$$
\boxed{\int d^d_E k\ F\left(|\vec{k}|^2\right) = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}\int_0^\infty dr r^{d-1} F\left(r^2\right)}
$$

が成立する. これより I は

$$
I = i\frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)(2\pi)^d}\int dr \frac{r^{d-1}}{\left(r^2+c^2\right)^2}
$$

と求められる.

今変数変換

$$
r^2+c^2 = \frac{c^2}{x}
$$

を行えば $r=c\sqrt{\frac{1}{x}-1}\quad (r>0)$ であるから $dr=\frac{-c}{2x^2\sqrt{1/x-1}}dx$ また $\begin{array}{c|c} r & 0\to\infty \\ \hline x & 1\to 0\end{array}$ より

$$
\begin{aligned}
&= i\frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)(2\pi)^d}\int_0^1 dx\left(\frac{c}{2x^2\sqrt{1/x-1}}\right)\frac{(c\sqrt{1/x-1})^{d-1}}{\left(c^2/x\right)^2} \\
&= i\frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)(2\pi)^d}c^{d-4}\frac{1}{2}\int_0^1 dx\left(\frac{1}{x}-1\right)^{\frac{d}{2}-1} \\
&= i\frac{\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)(2\pi)^d}c^{d-4}\int_0^1 dx x^{1-\frac{d}{2}}(1-x)^{\frac{d}{2}-1}
\end{aligned}
$$

と変形されていく．ここでこれがベータ関数

$$B(s,t)=\int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1}\ \mathrm{d}x$$

の形で表されることに気が付く．

$$\begin{cases} s-1=1-\frac{d}{2} \\ t-1=\frac{d}{2}-1\end{cases}$$

として

$$I=i\frac{\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)(2\pi)^d}c^{d-4}B\left(2-\frac{d}{2},\frac{d}{2}\right)$$

と書き直される．さらにベータ関数とガンマ関数の関係式

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

にて

$$
\begin{aligned}
I &= i\frac{\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)(2\pi)^d}c^{d-4}\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \\
&= i\frac{\pi^{d/2}}{(2\pi)^d}c^{d-4}\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)
\end{aligned}
$$

を得る. 以上にて示された.

これに対して $d\to 4$ とすると

$$i\frac{1}{(4\pi)^2}\left[\frac{2}{4-d}-\log c^2+\log(4\pi)-\gamma+O(d-4)\right]$$

0.1 p^2 を含んでいる場合

$$
\begin{aligned}
\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{k^2}{\left(k^2-c^2+i\varepsilon\right)^2} &= i\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{-|\vec{k}|^2}{\left(|\vec{k}|^2+c^2\right)^2} \\
&= \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}(-i)\int_0^\infty\frac{dr}{(2\pi)^d}r^{d-1}\frac{r^2}{\left(r^2+c^2\right)^2}
\end{aligned}
$$

同様の変数変換にて

$$=\frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}\frac{(-i)}{(2\pi)^d}\int_0^1 dx\left[\frac{c}{2x^2\sqrt{1/x-1}}\right]\frac{(c\sqrt{1/x-1})^{d+1}}{\left(c^2/x\right)^2}$$

計算していき

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \frac{(-i)}{(2\pi)^d} c^{d-2} \int_0^1 dx x^{-d} (1-x)^d \\
&= \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \frac{(-i)}{(2\pi)^d} c^{d-2} B(1-d, 1+d) \\
&= \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \frac{(-i)}{(2\pi)^d} c^{d-2} \Gamma(1-d)\Gamma(1+d)
\end{aligned}
$$

ここで $d=4$ におけるローラン展開は

$$
\frac{4}{d-4} + (2\gamma - 1) + \frac{1}{12}\left(6 - 6\gamma + 6\gamma^2 + 7\pi^2\right)(d-4) + O(d-4)
$$

であるから、$d=4$ において 1 次的な発散を示す. まとめて

次元正則化 (Dimensional Regularization) の公式

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dk^4}{(2\pi)^4} \frac{1}{\left(k^2 - c^2 + i\varepsilon\right)^2} &= \frac{i}{16\pi^2} \lim_{d\to 4}\left[\frac{2}{4-d} - \log c^2 + \log(2\pi) - \gamma + O(d-4)\right] \\
\int \frac{dk^4}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{\left(k^2 - c^2 + i\varepsilon\right)^2} &= \frac{ic^2}{16\pi^2} \lim_{d\to 4}\left[\frac{4}{4-d} + (1 - 2\gamma) + O(d-4)\right]
\end{aligned}
$$

トレース公式の証明のメモ

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{tr}\left(\gamma^a\gamma^b\right) = 4\eta^{ab} \\
&\mathrm{tr}\left(\gamma^a\gamma^b\gamma^c\gamma^d\right) = 4\left(\eta^{ab}\eta^{cd} - \eta^{ac}\eta^{bd} + \eta^{ad}\eta^{bc}\right)
\end{aligned}
$$

(Proof)
ガンマ行列はクリフォード代数 $\left\{\gamma^a, \gamma^b\right\} = 2\eta^{ab}$ を満たす. トレースをとって

$$
\mathrm{tr}\left(\left\{\gamma^a, \gamma^b\right\}\right) = \mathrm{tr}\left(2\eta^{ab}\right)
$$

トレースの巡回性によって左辺は

$$
\begin{aligned}
(LHS) &= 2\,\mathrm{tr}\left(\gamma^a\gamma^b\right) \\
(RHS) &= \mathrm{tr}\left(2\eta^{ab}\right) = 2\eta^{ab}\,\mathrm{tr}(1) = 8\eta^{ab}
\end{aligned}
$$

よって

$$
\mathrm{tr}\left(\gamma^a\gamma^b\right) = 4\eta^{ab}
$$

を得る. 次に下の式を示す. クリフォード代数の関係

$$
\begin{aligned}
\left\{\gamma^a, \gamma^b\right\}\left\{\gamma^c, \gamma^d\right\} &= 4\eta^{ab}\eta^{cd} \\
\left\{\gamma^a, \gamma^c\right\}\left\{\gamma^b, \gamma^d\right\} &= 4\eta^{ac}\eta^{bd} \\
\left\{\gamma^a, \gamma^d\right\}\left\{\gamma^b, \gamma^c\right\} &= 4\eta^{ad}\eta^{bc}
\end{aligned}
$$

簡単のため $\gamma^\mu \equiv \mu$ とする. 上の 3 つは

$$
\begin{aligned}
(ab+ba)(cd+dc) &= abcd + abdc + bacd + badc \\
(ac+ca)(bd+db) &= acbd + acdb + cabd + cadb \\
(ad+da)(bc+cb) &= adbc + adcb + dabc + dacb
\end{aligned}
$$

今トレースをとり、これらの一番目と 3 番目を足して、2 番目を引く. これより

$$(\mathrm{tr}(abcd) + \mathrm{tr}(adcb)) = 8\left(\eta^{ab}\eta^{cd} - \eta^{ac}\eta^{bd} + \eta^{ad}\eta^{bc}\right)$$

を得る. ここで

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(abcd) &= \mathrm{tr}\left\{\left(2\eta^{ab} - ba\right)\left(2\eta^{cd} - dc\right)\right\} \\
&= \mathrm{tr}\left\{4\eta^{ab}\eta^{cd} - 2\eta^{ab}dc - 2ba\eta^{cd} + badc\right\}. \\
&= 16\eta^{ab}\eta^{cd} - 8\eta^{ab}\eta^{cd} - 8\eta^{ab}\eta^{cd} + \mathrm{tr}(badc) \\
&= \mathrm{tr}(adcb)
\end{aligned}$$

すなわち

$$\mathrm{tr}\left(\gamma^a\gamma^b\gamma^c\gamma^d\right) = 4\left(\eta^{ab}\eta^{cd} - \eta^{ac}\eta^{bd} + \eta^{ad}\eta^{bc}\right)$$

以上にて示された.(Q.E.D)