1　格子の外部自己同型の位数について

1.1　$\mathbb{Z}^3$ 格子の外部自己同型

格子の外部自己同型の考察として以下の格子を例にして考える.

$$\Lambda = \mathrm{span}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

この格子は以下の図に示される様に、最短ベクトルは 6 個である. よく知られている事実により

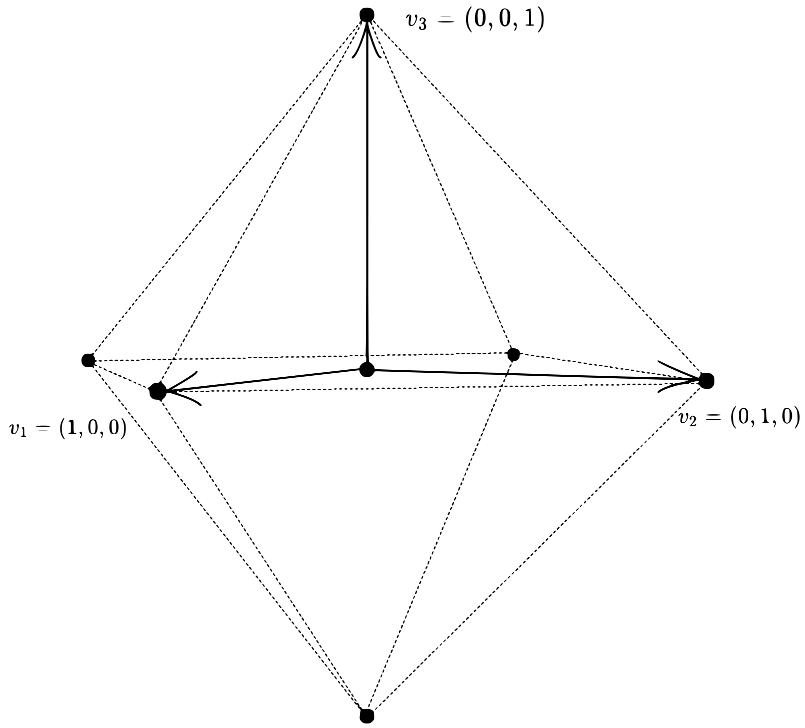

Figure 1: $\mathbb{Z}^3$ の最短ベクトル.

ノルム $\Phi : \Lambda \times \Lambda \to \mathbb{R} \quad (x,y) \mapsto \Phi(x,y) = x \cdot y^T$ は直交変換に対して不変である. なぜならば $x' = xP, y' = yP \quad P \in SO(3)$ に対して

$$\begin{aligned}\Phi(x', y') &= xP \cdot (yP)^T \\ &= xP \cdot P^{-1} \cdot y^T \\ &= xy^T \\ &= \Phi(x,y)\end{aligned}$$

となるからである. これより直交変換は等角等長変換である.

この格子を不変にする直交変換も、もちろん上の 3 つの生成元の角度と長さを変えない. 言い換えるとこの格子を不変にする群は、生成行列を M として以下で定義されるグラム行列 A

$$A := M \cdot M^T = \begin{pmatrix} \Phi(v_1, v_1) & \Phi(v_1, v_2) & \Phi(v_1, v_3) \\ \Phi(v_2, v_1) & \Phi(v_2, v_2) & \Phi(v_2, v_3) \\ \Phi(v_3, v_1) & \Phi(v_3, v_2) & \Phi(v_3, v_3) \end{pmatrix}$$

の直交群 $SO(3)$ の固定部分群 $G_A = \{g \in SO(3) | gAg^{-1} = A\}$ のことである.

今、この状況においてグラム行列 A は単に単位行列である.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

これは、それぞれの基底が互いに直交しており、ノルムが 1 であることを意味している. つまり、この格子を不変にする直交変換は、この関係を満たす基底の組み合わせだけ存在する. 例えば上選ばれている基底が

$$e_1^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_3^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

以下の様に変換されても

$${e'_1}^T = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad {e'_2}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad {e'_3}^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

それは等角等長変換であるため直交変換であり、グラム行列を不変にする. この変換 X は

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と定まる.

この様にしてグラム行列 A を不変にする観点から、この格子を不変にする直交変換の数がわかる. それは以下の様に考えれば良い

(i) 長さが 1 の合計 6 つのベクトルから 1 つを選ぶ. (6 通り)
(ii) 次に長さが 1 であり、上のベクトルに直交するベクトルを 1 つ選ぶ.(4 通り)
(iii) 最後に長さが 1 であり、(i),(ii) で選んだ 2 のベクトルに直交するベクトルを 1 つ選ぶ.(2 通り)

これより合計 $6 \cdot 4 \cdot 2 = 48$ 個の直交変換が存在することになる. つまり $|G_A| = 48$ であることになる.

1.2 正 20 面体の外部自己同型

最初に以下の図の $1, 5, 6$ の場所に基底が選ばれているとする. 合計 12 個の頂点のなかで、この 3 つのベクトルに対する直交変換は以下で得られる.
(i) 最初に 12 個の頂点から 1 つのベクトルを選ぶ. (12 通り)
(ii) そのベクトルに対して隣接したベクトルを 1 つ選ぶ.(5 通り)
(iii) 上の 2 つのベクトルに対して、正三角形をなすベクトルを 1 つ選ぶ.(2 通り)

以上にて外部自己同型の位数は $12 \cdot 5 \cdot 2 = 120$ と求められる.

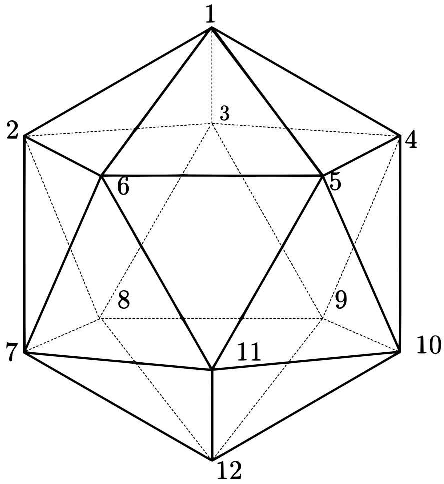

Figure 2: 正 20 面体

1.3 Weyl 群 $W(F_4)$ について

これまでの議論で分かった様に、格子の外部自己同型を調べる上で格子の基底同士の関係 (ノルム) と最短ベクトルの数が重要なのであった.3 番目の例としてルート系 F_4 格子を考える.

$$\Lambda_{F_4} = \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

生成行列 M は

$$M = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

グラム行列 A は

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & 1 & & \\ \frac{1}{2} & & 1 & \\ \frac{1}{2} & & & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & & \\ \frac{1}{2} & & 1 & \\ \frac{1}{2} & & & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

これより e_2, e_3, e_4 は互いに直交し、e_1 と e_2, e_3, e_4 は内積が 1/2、それぞれのノルムが 1 であることがわかる.

加えて実際に生成してわかる様に F_4 格子は $(\pm 1, 0^3)$ の 8 個のベクトル、$((1/2)^m, (-1/2)^n) \quad (m+n=4)$ の 16 個のベクトルの合計 24 個の最短ベクトルを持っている.

それでは先ず e_1' が $(\pm 1/2, \pm 1/2, \pm 1/2, \pm 1/2)$ タイプのベクトルである場合から考える.

1.3.1 e_1' が $(\pm 1/2, \pm 1/2, \pm 1/2, \pm 1/2)$ タイプでそれ以外は $(\pm 1, 0^3)$ の場合

(i)e_1' の選び方は 16 通り存在する.
(ii) 上で選んだ e_1' に対して内積が $+1/2$ であるベクトルを選ぶ.(4 通り)

(iii)e'_1 に対して内積が $+1/2$, e'_2 に対して内積が 0 であるベクトルを選ぶ.(3 通り)
(iv)e'_1 に対して内積が $+1/2$, e'_2, e'_3 に対して内積が 0 であるベクトルを選ぶ. (2 通り)

よって $16 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 384$ 通り

1.3.2 全てが $(\pm 1/2, \pm 1/2, \pm 1/2, \pm 1/2)$ タイプの場合

これには例えば以下である.

$$\begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \\ e'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

これも同様にカウントしていき、合計 384 通り存在する.

1.3.3 e'_1 が $(\pm 1, 0^3)$ タイプで、それ以外が $(\pm 1/2, \pm 1/2, \pm 1/2, \pm 1/2)$ タイプの場合

例えば以下の様な場合である.

$$\begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \\ e'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(i)e'_1 の選び方は 8 通り存在する.
(ii)e'_1 の ± 1 の座標に同符号の $1/2$ を置く選び方は $2^3 = 8$ 通り.
(iii)e'_1 の ± 1 の座標に同符号の $1/2$ を置き、e'_2 と直交するとりかたは 3 通り.
(iv) 最後のベクトルの選びかたは 2 通り
以上にて合計 $8 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 2 = 384$ 通り

以上にて直交変換の数は $384 \times 3 = 1152$ 個である.