

Symmetry(A Zee)

Misaki Ohta, University of the Ryukyus

November 24, 2022

Abstract

今回のラグランジアン密度は前回までとは異なり、2つ以上の場合 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ が含まれているものを考える。ここで論じるのはそれらがただ適当に付加される場合ではなく、対称性(回転対称性)を持つ場合である。そのためにまずは座標回転を表す直交群 $O(n)$ の性質の復習から始めたい。

1 行列の準備

1.1 直交行列について

n 次直交群は以下で定義される $n \times n$ 行列の集合である。

$$O(n) = \{A \in M(n) \mid A^t = A^{-1}\}$$

この集合に含まれる任意の $A, B \in O(n)$ に対して

$$\begin{aligned}(AB)^t &= B^t A^t \\ &= B^{-1} A^{-1} \\ &= (AB)^{-1}\end{aligned}$$

となることからこの集合は群をなすことがわかる。(単位元はもちろん単位行列である.)

性質

$R \in O(n)$ とするとき、それはいつでも

$$R = e^{\theta A}$$

と書くことができる。ただし A は反対称行列である。($A^t = -A$)

(例) 実際に計算してみるとわかりやすい。例えば $O(2)$ は以下の一つの生成子 R で生成される。

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

θ について Taylor 展開を行い

$$\begin{aligned}&= \begin{pmatrix} 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots & -\theta + \frac{\theta^3}{3!} - \frac{\theta^5}{5!} + \dots \\ \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots & 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots \end{pmatrix} \\ &= E + \theta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\theta^2}{2!} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{\theta^3}{3!} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \dots\end{aligned}$$

と変形される。ここで

$$A \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

と定義することで、 R は改めて

$$T = e^{\theta A}$$

A はこの場合確かに反対称行列である。よって $O(2)$ の場合によって上の性質が確かめられた。

ところで上の場合の行列 A は $\sqrt{-1}$ の 2 次元の表し方としても知られている。

$$\sqrt{-1} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

実際、 $A^2 = -E$ となる。これより有名な同型 $SO(2) \cong U(1)$ を確かめることができた。

1.2 指数行列の性質

念の為に一般の行列に対する指数行列の性質をいくつか記載しておく。

指数行列の性質

M, A, B を $n \times n$ 正方行列とする。このとき

- $(e^M)^t = e^{M^t}$
- $[A, B] = 0$ のとき $e^A \cdot e^B = e^{A+B}$ である。
- $(e^M)^{-1} = e^{-M}$
- A が反対称行列であるとき、 e^A は直交行列である。
- M が対称行列 Q を M の対角化とする。このとき $\det(e^M) = e^{\text{Tr}(Q)}$

(証明) (1),(2)

$$\begin{aligned} (e^M)^t &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M^n}{n!} \right)^t \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(M^t)^n}{n!} \\ &= e^{M^t} \end{aligned}$$

よって $(e^M)^t = e^{M^t}$ 。次に $[A, B] = 0$ のとき $e^A \cdot e^B = e^{A+B}$ であることは明らか。

(3)

$e^M \cdot (e^M)^{-1} = E$ である。一方で $M, -M$ は可換であるから $e^M \cdot e^{-M} = e^{M-M} = E$ 。これらより $(e^M)^{-1} = e^{-M}$

(4) 単純計算より

$$\begin{aligned} (e^A)^t &= e^{A^t} \\ &= e^{-A} \\ &= (e^A)^{-1} \end{aligned}$$

よって A が反対称行列であるとき e^A は直交行列である。

(5) 対称行列は直交行列を用いていつでも実数を固有値とする対角化が可能であった。直交行列を P 、対角化された行列を Q とする。

$$e^M = e^{PQP^{-1}}$$

ここで

$$\begin{aligned} e^{PQP^{-1}} &= 1 + PQP^{-1} + \frac{1}{2!} (PQP^{-1}) (PQP^{-1}) + \dots \\ &= 1 + Q + P \frac{Q^2}{2!} P^{-1} + P \frac{Q^3}{3!} P^{-1} + \dots \\ &= Pe^Q P^{-1} \end{aligned}$$

であることより両辺行列式をとり

$$\begin{aligned} \det(e^M) &= \det(Pe^Q P^{-1}) = \det(e^Q) \\ &= \det \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & & \\ & e^{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} = e^{\lambda_1} e^{\lambda_2} \dots e^{\lambda_n} \end{aligned}$$

これはすなわち

$$= e^{Tr(Q)}$$

以上にて示された。

1.3 正方行列の直和分解と反対称行列

以前述べた様に任意の正方行列 $M \in M(n)$ は T を A を以下のように定義することで

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} (M + M^t) \\ A &= \frac{1}{2} (M - M^t). \end{aligned}$$

$M = T + A$ と対称行列 T 、反対称行列 A に分解できるのであった。それぞれの自由度は $n(n+1)/2, n(n-1)/2$ であるから

$$n \otimes n = \frac{n(n+1)}{2} \oplus \frac{n(n-1)}{2}$$

という分解になる。ここで対称行列からトレースレスであるものだけ更に分解可能であり、これによって束縛条件がつき以下ようになる。

$$= \left[\frac{n(n+1)}{2} - 1 \right] \oplus 1 \oplus \frac{n(n-1)}{2}$$

これによってトレースレスな対称行列は $\frac{n(n+1)-2}{2}$ 、反対称行列は $\frac{n(n-1)}{2}$ の自由度を持つ。1.1 の内容と関連させるならば任意の n 次直交行列 R は $\frac{n(n-1)}{2}$ 個の反対称行列の線型結合で表すことができる。

$$R = e^{\theta A} = e^{\sum_{i < j \leq n} \theta^{ij} A^{ij}} = e^{\theta^{12} A^{12} + \theta^{13} A^{13} + \dots + \theta^{n-1, n} A^{n-1, n}}$$

例えば3次元の場合は上の分解は $5 \oplus 1 \oplus 3$ であるから、反対称行列の自由度は3であり、それゆえに直交行列 $R \in O(3)$ は

$$R = e^{\theta^{12} A^{12} + \theta^{13} A^{13} + \theta^{23} A^{23}}$$

と表される。実際1,2平面,1,3平面,2,3平面の回転は

$$R^{12} = \begin{pmatrix} \cos \theta^{12} & -\sin \theta^{12} & 0 \\ \sin \theta^{12} & \cos \theta^{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\theta^{12})^n}{n!} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n$$

$$R^{13} = \begin{pmatrix} \cos \theta^{13} & 0 & -\sin \theta^{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta^{13} & 0 & \cos \theta^{13} \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\theta^{13})^n}{n!} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n$$

$$R^{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta^{23} & -\sin \theta^{23} \\ 0 & \sin \theta^{23} & \cos \theta^{23} \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\theta^{23})^n}{n!} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n$$

と展開でき、それぞれの反対称行列は

$$A^{12} = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix} \quad A^{13} = \begin{pmatrix} & -1 \\ & \end{pmatrix} \quad A^{23} = \begin{pmatrix} & & -1 \\ & 1 & \\ & & \end{pmatrix}$$

であるし、線型独立は明らかである。そして実はこれらは量子力学でよく目にした関係である、以下を満たしていることもわかる。

$$\begin{aligned} [A^{12}, A^{23}] &= A^{31} \\ [A^{23}, A^{31}] &= A^{12} \\ [A^{31}, A^{12}] &= A^{23} \end{aligned}$$

実際量子力学のものによく関係があり、それゆえ A を純虚数 A' として $R = e^{i\theta \cdot A'}$ の表示をよく使う。

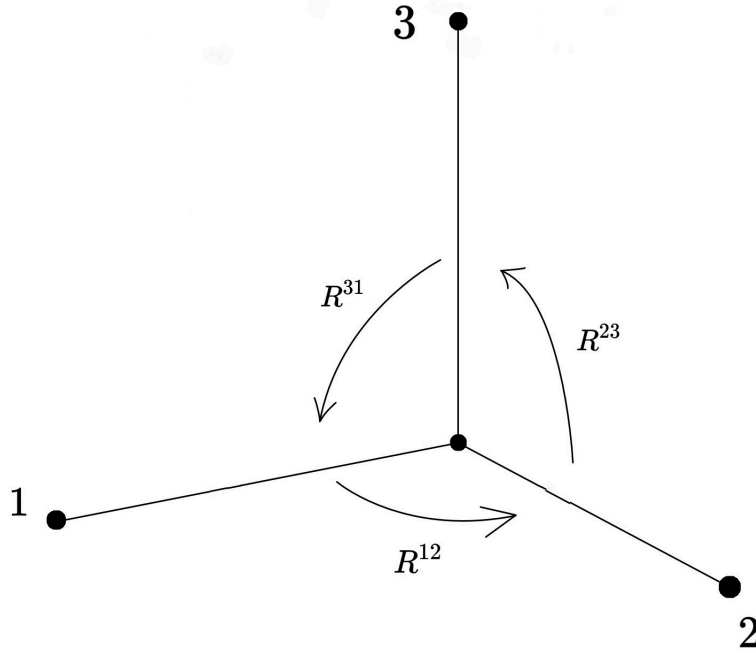


Figure 1: 回転行列の作用の図

2 回転対称の Lagrangian 密度

これまで扱ってきた Lagrangian は、少なくとも符号の反転に対して対称的 (不変) であった。2つのスカラー場に対する Lagrangian 密度を反転対称性のもとで考えた場合

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial\varphi_1)^2 - \frac{1}{2} m_1^2 \varphi_1^2 - \frac{\lambda_1}{4} \varphi_1^4 + \frac{1}{2} (\partial\varphi_2)^2 - \frac{1}{2} m_2^2 \varphi_2^2 - \frac{\lambda_2}{4} \varphi_2^4 - \frac{\rho}{2} \varphi_1^2 \varphi_2^2 + J_1 \varphi_1 + J_2 \varphi_2 \quad (1)$$

とすることができる. しかしここで更に対称性を上げるため $m_1 = m_2, \rho = \lambda_1 = \lambda_2$ としたものを考える.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [(\partial\varphi_1)^2 + (\partial\varphi_2)^2] - \frac{1}{2} m^2 (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) - \frac{\lambda}{4} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^2 \quad (2)$$

この Lagrangian 密度において実際に計算すればわかることであるが $O(2)$ の作用

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi'_1 \\ \varphi'_2 \end{pmatrix}$$

において不変である. つまり回転対称性をもつ. この証明は実直に代入して計算すれば確かにわかるが, 直交群の作用の性質を考えれば更に明らかである.

直交群はノルムを不変にするという性質がある. それは直ぐにわかることで, ベクトルを以下

$$\vec{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix}$$

直交変換 R として

$$\vec{\varphi}' = R\vec{\varphi}$$

とすればノルムは

$$\begin{aligned} (\vec{\varphi}')^t \cdot \vec{\varphi}' &= (R\vec{\varphi})^t (R\vec{\varphi}) \\ &= \vec{\varphi}^t R^t R \vec{\varphi} \\ &= \vec{\varphi}^t \vec{\varphi} \end{aligned}$$

として不変である. (Zee 先生は $(\vec{\varphi})^2 := \vec{\varphi}^t \vec{\varphi} = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \dots + \varphi_n^2$ と定義している.). 上の式 (2) の Lagrangian は一般的に

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [(\partial\vec{\varphi})^2 - m^2 \vec{\varphi}^2] - \frac{\lambda}{4} (\vec{\varphi}^2)^2 \quad (3)$$

であるのだから, 直交変換に対して不変である.

2.1 (2) の運動方程式

式 (2) の運動方程式は

$$\begin{cases} [\partial^2 + m^2 + \lambda(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)] \varphi_1 = 0 \\ [\partial^2 + m^2 + \lambda(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)] \varphi_2 = 0 \end{cases} \quad (4)$$

であることは変分をいつものように変分をとることで直ぐにわかる. 実際 $\varphi_1 \rightarrow \varphi_1 + \varepsilon$ によって (2) の Lagrangian 密度は

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\rightarrow \frac{1}{2} [(\partial(\varphi_1 + \varepsilon))^2 + (\partial\varphi_2)^2] - \frac{m^2}{2} \{(\varphi_1 + \varepsilon)^2 + \varphi_2^2\} - \frac{\lambda}{4} \{(\varphi_1 + \varepsilon)^2 + \varphi_2^2\}^2 \\ &= \frac{1}{2} [(\partial\varphi_1)^2 + 2\partial\varphi_1\partial\varepsilon + (\partial\varphi_2)^2] - \frac{m^2}{2} (\varphi_1^2 + 2\varphi_1\varepsilon + \varphi_2^2) - \frac{\lambda}{4} (\varphi_1^2 + 2\varphi_1\varepsilon + \varphi_2^2)^2 \\ &= \mathcal{L} + \partial\varphi_1\partial\varepsilon - m^2\varphi_1\varepsilon - \lambda(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)\varphi_1\varepsilon \end{aligned}$$

ただし ε の 2 次の項は 0 とした. ここで $\partial(\partial\varphi_1 \cdot \varepsilon) = \partial^2\varphi_1 \cdot \varepsilon + \partial\varphi_1\partial\varepsilon$ をつかって代入したあと, 部分積分の項をおとして

$$\Rightarrow \mathcal{L} - (\partial^2\varphi_1) \cdot \varepsilon - m^2\varphi_1\varepsilon - \lambda(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)\varphi_1\varepsilon$$

変化分は 0 でなければいけないから

$$[\partial^2 + m^2 + \lambda(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)] \varphi_1 = 0$$

同様に φ_2 の変分をとることで 2 番目の式を得る.

2.2 連続的対称性

上より一般の場合の運動方程式は

$$(\partial^2 + m^2) \varphi_a = -\lambda \varphi^2 \varphi_a \quad (5)$$

となる. この運動方程式によりカレントを

$$J^\mu \equiv i(\varphi_1 \partial^\mu \varphi_2 - \varphi_2 \partial^\mu \varphi_1) \quad (6)$$

と定義すればカレントは保存される.

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad (7)$$

実際

$$\begin{aligned} \partial_\mu J^\mu &= i\partial_\mu (\varphi_1 \partial^\mu \varphi_2 - \varphi_2 \partial^\mu \varphi_1) \\ &= i(\partial_\mu \varphi_1 \partial^\mu \varphi_2 + \varphi_1 \partial^2 \varphi_2 - \partial_\mu \varphi_2 \partial^\mu \varphi_1 - \varphi_2 \partial^2 \varphi_1) \\ &= i(\varphi_1 \partial^2 \varphi_2 - \varphi_2 \partial^2 \varphi_1) \end{aligned}$$

と計算され、あとは運動方程式を適用すれば 0 となることが得られる. チャージ $Q = \int d^D x J^0$ はちょうど電荷の様に保存する. 歴史的にはハイゼンベルクの陽子と中性子の質量がほとんど等しいことからそれら変換の間に内部対称性があるのではという考察からはじまっている. 内部対称性は理論の形を制限する. 回転対称性が式 (1) の Lagrangian を (2) ヘシンプルにした様に.

Lagrangian が回転対称であれば、作用 S も同じく回転対称である. これまで計算してきた確率振幅

$${}_i D_{ab}(x) = \int D\vec{\varphi} e^{iS} \varphi_a(x) \varphi_b(0) \quad (8)$$

も回転対称であるためには測度が回転対称であり、かつ D_{ab} が δ_{ab} に比例すればよい. なぜなら直交行列 $R_{aa'}, R_{bb'}$ を $\varphi_a(x) \varphi_b(0)$ にそれぞれ作用させ

$${}_i D_{a'b'}(x) R_{a\alpha} R_{bb'} = \int D\vec{\varphi} e^{iS} \varphi_{a'}(x) R_{a\alpha} \varphi_b(0) R_{bb'}$$

ここで変数変換 $\varphi \rightarrow R\varphi$ とすれば、作用は Lagrangian が回転不変であるから不変で、測度も仮定により不変である. これより

$$= \int D\vec{\varphi} e^{iS} \varphi_a(x) \varphi_b(0) = {}_i D_{ab}$$

これは線型代数でいうところの直交行列による作用 $OAO^t = A$ である ($O \in O(n)$).

$$D_{a'b'}(x) R_{a\alpha} R_{bb'} = D_{ab}$$

が任意の直交変換 R で不変であるためには、単位行列のスカラー倍 $D_{ab} = c\delta_{ab}$ であればよい. そうすれば線型代数でいうところ

$$OAO^t = O(cE)O^t = cOO^t = cE$$

のように変形され左辺右辺が等しくなる. この様にプロパゲーターも回転対称であるようにすれば、それによって生成されるダイアグラムもまた回転対称であるというのは簡単に想定できる.

2.3 無限小回転

回転行列の θ を十分小さいものとして、例えば $O(2)$ の場合 A を反対称行列として

$$\begin{aligned} R &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\theta \\ \theta & 1 \end{pmatrix} \\ &= 1 + \theta A \end{aligned}$$

と近似される. 上で述べた様に任意の直交行列 $R \in O(n)$ に対して、 $n(n-1)/2$ 個の線型独立な反対称行列を持ってして

$$R = e^{\theta^{12} A^{12} + \theta^{13} A^{13} + \dots + \theta^{n-1, n} A^{n-1, n}} = e^{\theta \mathbf{A}}$$

(Zee 先生の本では $\theta \mathbf{A} = \theta^A T^A$ と書いてある. 他の本で反対称行列を A と書いていた影響でそれをつかってしまった...). 高次元の場合でもどの θ^i についても十分小さくとして

$$\sim (1 + \theta \mathbf{A})$$

として良い. Zee 先生の本の様に書けば無限小回転による変換は

$$\begin{aligned} \varphi_a \rightarrow R_{ab} \varphi_b &\sim (1 + \theta^A T^A)_{ab} \varphi_b \\ &= \varphi_a + (\theta^A T^A)_{ab} \varphi_b \end{aligned}$$

であって微小変化分が

$$\delta \varphi_a = (\theta^A T^A)_{ab} \varphi_b$$

ということになる. 変化分は他の場が $\theta^i \ll 1$ だけ足されたり、引かれたりすることを意味する.

3 ネーターの定理

回転対称性を課した Lagrangian 密度の保存されるカレントが、いかにして生まれたか今知ることができる. Lagrangian 密度の微小変化は

$$\begin{aligned} 0 = \delta \mathcal{L} &= \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi_a} \delta \varphi_a + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \varphi_a} \delta \partial_\mu \varphi_a \\ &= \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi_a} \delta \varphi_a + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \varphi_a} \partial_\mu \delta \varphi_a \end{aligned} \quad (9)$$

ここで

$$\partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \varphi_a} \delta \varphi_a \right) = \partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \varphi_a} \right) \delta \varphi_a + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \varphi_a} \partial_\mu \delta \varphi_a \quad (10)$$

であって場の方程式

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi_a} = \partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \varphi_a} \right) \quad (11)$$

より

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \varphi_a} \partial_\mu \delta \varphi_a = \partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \varphi_a} \delta \varphi_a \right) - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi_a} \delta \varphi_a \quad (12)$$

と (10) 式は変形される. 式 (12) を式 (9) へ代入して

$$\partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \varphi_a} \delta \varphi_a \right) = 0 \quad (13)$$

を得る. よってカレントを

$$J^\mu \equiv \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \varphi_a} \delta \varphi_a \quad (14)$$

と定義すれば常に保存されることを意味する. これを上で定義した (3) 式に適用すると ($\delta \vec{\varphi} = \theta^i A^i \vec{\varphi}$ であったから)

$$J_\mu^i = \partial_\mu (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) \begin{pmatrix} A^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix} \quad (15)$$

このように保存するカレントに連続対称性が結びついていることがわかる. $(n(n-1)/2)$ 個のカレントを得ることになる. $O(2)$ であれば1個, $O(3)$ であれば3個. 実際2次元の場合

$$J_\mu = \partial_\mu \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \\ = \varphi_1 \partial_\mu \varphi_2 - \varphi_2 \partial_\mu \varphi_1$$

と上で先ほど求めた結果と合っている (i だけズレている)!! 3次元の場合は

$$J_\mu^{12} = \partial_\mu \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} \\ J_\mu^{13} = \partial_\mu \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} \\ J_\mu^{23} = \partial_\mu \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix}$$

つまり

$$J_\mu^{12} = \varphi_1 \partial_\mu \varphi_2 - \varphi_2 \partial_\mu \varphi_1 \\ J_\mu^{13} = \varphi_1 \partial_\mu \varphi_3 - \varphi_3 \partial_\mu \varphi_1 \\ J_\mu^{23} = \varphi_2 \partial_\mu \varphi_3 - \varphi_3 \partial_\mu \varphi_2$$

の総和である.

ところで直交群とユニタリー群は一般的に同型ではないものの、上で述べた様に

$$O(2) \cong U(1)$$

は成立している. この同型ゆえに複素スカラー場に回転対称性を与えることができる.

$$\varphi \equiv \frac{(\varphi_1 + i\varphi_2)}{\sqrt{2}} \quad (16)$$

と定義して Lagrangian は

$$\mathcal{L} = \partial\varphi^\dagger \partial\varphi - m^2 \varphi^\dagger \varphi - \lambda (\varphi^\dagger \varphi)^2 \quad (17)$$

のように書くことができる. 場の数が2個であるのも、上で述べた偶発的な群の同型による恩恵である. 上で記述した直交群がノルムを保存したように、この場合においては $\varphi \rightarrow \varphi' = e^{i\theta} \varphi$ についてノルムが不変である (エルミート内積). 実際

$$(\varphi')^\dagger \varphi = (e^{i\theta} \varphi)^\dagger (e^{i\theta} \varphi) \\ = \varphi^\dagger e^{-i\theta} e^{i\theta} \varphi \\ = \varphi^\dagger \varphi$$

と計算される.

4 生成子としてのチャージ

チャージ Q はこれまでの定義とネーターの定理により

$$Q \equiv \int d^3x J^0 = \int d^3x \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_0 \varphi_a} \delta \varphi_a \quad (18)$$

このチャージ Q が時間微分で 0 になることは、カレントの保存より直ぐにえる。実はこのチャージ Q と場の交換積を考えると実は場の微小変化

$$i[Q, \varphi_a] = \delta\varphi_a \quad (19)$$

となっていることがわかる。実際

$$\begin{aligned} i[Q, \varphi_a] &= i(Q\varphi_a - \varphi_a Q) \\ &= i \int d^3x \left[\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial\varphi_a} \delta\varphi_a \cdot \varphi_a - \varphi_a \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial\varphi_a} \delta\varphi_a \right] \\ &= i \int d^3x \left[\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial\varphi_a}, \varphi_a \right] \delta\varphi_a \end{aligned}$$

ここで正準共役運動量密度と場の関係式を思い出す。

$$\begin{aligned} \pi(\vec{x}, t) &= \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta_0\dot{\varphi}(\vec{x}, t)} \\ [\pi(\vec{x}, t), \varphi(\vec{x}', t)] &= -i\delta^{(D)}(\vec{x} - \vec{x}') \end{aligned}$$

これを代入して式 (19) を直ぐに得る。

$$= \delta\varphi_a$$

5 問

$SO(3)$ の 5 次元表現にしたがって変換するローレンツスカラー場 φ を含む $SO(3)$ 不変な理論に対するラグランジアンを 4 次の項まで導け。

(解答)

3×3 行列はトレースレスの対称行列、トレースの行列、反対称行列で

$$3 \otimes 3 = 5 \oplus 1 \oplus 3$$

と分解できるのであった。よってトレースレスの対称行列の次元は 5 である。つまり $SO(3)$ の作用する対称行列は

$$S = a_1 S_1 + a_2 S_2 + \cdots + a_5 S_5$$

のような一次結合で表される。 a_i は定数としている。 S_i は具体的に以下のように書ける。

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \end{array} \right\}$$

この基底をとることで S は改めて

$$S = \begin{pmatrix} a_4 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_5 - a_4 & a_3 \\ a_2 & a_3 & -a_5 \end{pmatrix}$$

となる。また対称行列は常に直交行列で対角化可能である。対角化された行列を Q とすると

$$Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & \cdots & \lambda_3 \end{pmatrix} = P^{-1} S P$$

右辺がトレースレスであることから

$$Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & \cdots & -(\lambda_1 + \lambda_2) \end{pmatrix}$$

である固有値である対角化を得る. これより $\text{Tr } S^n$ は

$$\begin{aligned} \text{Tr } S^n &= \text{Tr } Q^n \\ &= \lambda_1^n + \lambda_2^n + (\lambda_1 + \lambda_2)^n \end{aligned}$$

ただしトレースの可換性を用いた. ($\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$). 以下計算

$$\begin{aligned} \text{Tr}(S) &= 0 \\ \text{Tr}(S^2) &= 2(\lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2) \\ \text{Tr}(S^3) &= -3(\lambda_1 + \lambda_2)\lambda_1\lambda_2 \\ \text{Tr}(S^4) &= 2(\lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2)^2 \\ \text{Tr}(S^5) &= -5(\lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2)(\lambda_1 + \lambda_2)\lambda_1\lambda_2 \\ \text{Tr}(S^6) &= 2\lambda_1^6 + 6\lambda_1^5\lambda_2 + 15\lambda_1^4\lambda_2^2 + 20\lambda_1^3\lambda_2^3 + 15\lambda_1^2\lambda_2^4 + 6\lambda_1\lambda_2^5 + 2\lambda_2^6 \end{aligned}$$

これよりわかる様に

$$\text{Tr}(S^2)^2 = 2\text{Tr}(S^4)$$

が成立している. これより

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\text{Tr}(\partial_\mu S)^2 - \frac{1}{2}m^2\text{Tr}(S^2) - 2\lambda\text{Tr}(S^4)$$

とすると

$$= \frac{1}{2}\text{Tr}(\partial_\mu S)^2 - \frac{1}{2}m^2\text{Tr}(S^2) - \lambda(\text{Tr}(S^2))^2$$

⋮

追記中.

6 付録

$$\begin{aligned} A^{12} &= \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix} & A^{13} &= \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix} & A^{14} &= \begin{pmatrix} & -1 \\ & 1 \end{pmatrix} \\ A^{23} &= \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix} & A^{24} &= \begin{pmatrix} & -1 \\ & 1 \end{pmatrix} & A^{34} &= \begin{pmatrix} & \\ & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

これからクォータニオンを構成できる. それは

$$\begin{aligned} i &= A^{21} + A^{43} \\ j &= A^{31} + A^{24} \\ k &= A^{14} + A^{23} \end{aligned}$$

であって

$$ij = k, jk = i, ki = j, \quad i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

また J.Conway の本によれば、4 次交代群 \mathfrak{A}_4 はこれより

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_4 &= \langle i, j, k, \frac{1+i+j+k}{2} \rangle \\ &= \langle -A^{12} - A^{34}, -A^{13} + A^{24}, \frac{1}{2}(+E - A^{12} - A^{13} + A^{14} + A^{23} + A^{24} - A^{34}) \rangle\end{aligned}$$

この群の 24 個の元は全て、 A^{ij} と E の 7 個の一次結合で表される.