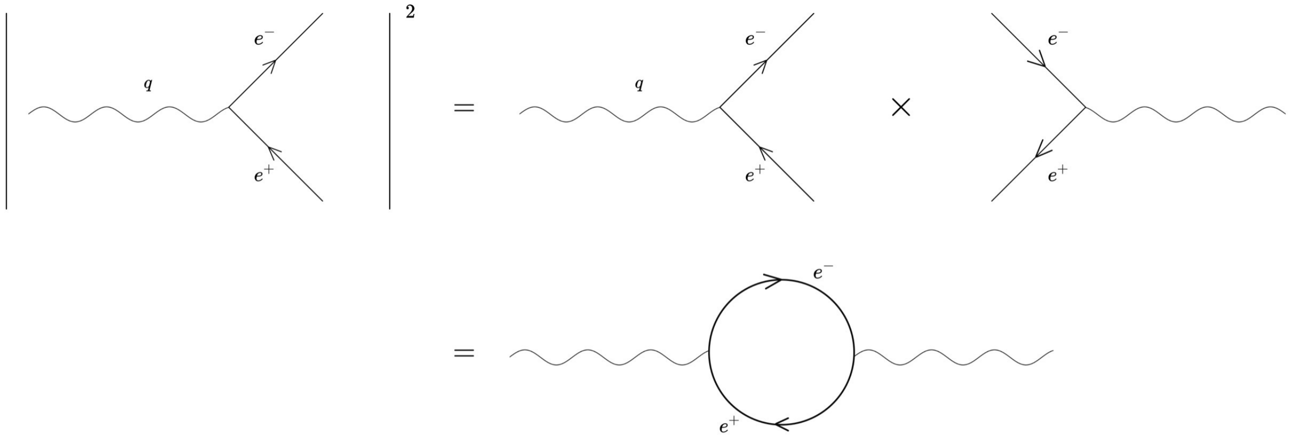
QED のループダイアグラム評価

$\gamma \to e^+ + e^-$ の確率は以下の崩壊のダイアグラムの確率振幅の絶対値の 2 乗、すなわちループダイアグラムの評価を行うことに帰着される.



$$= i\Pi^{\mu\nu}(q)$$

Figure 1: $\gamma \to e^+ + e^-$ の崩壊確率とループダイアグラムの図

ループダイアグラムと呼ばれている項について計算したい. (このダイアグラムについて、崩壊の時はリアルでなければならない.(つまり on shell) でなければならないが、崩壊前のこの図で言えばループに当たる部分は off shell と呼ばれ、量子力学の不確定性が許す (運動量保存の許す) 凡ゆる可能性をとって良い.)

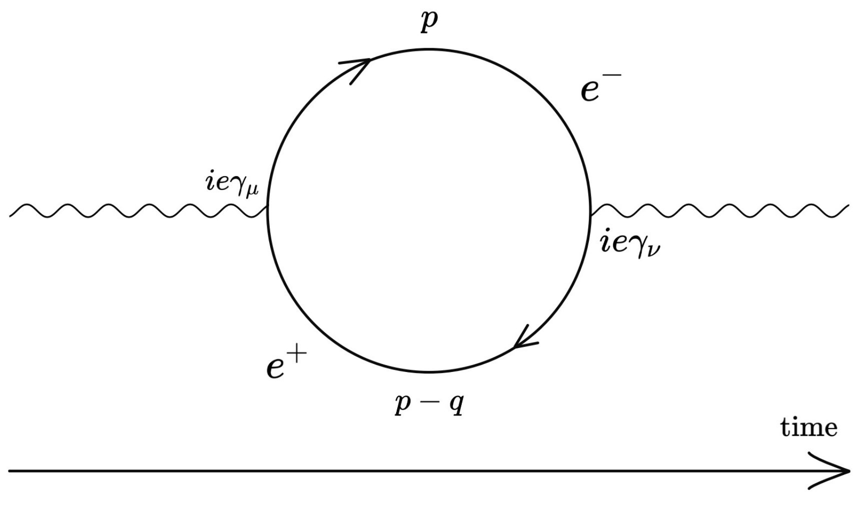


Figure 2: QED のループダイアグラム

QED Lagrangian は以下であった

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi}\left\{i\gamma^\mu\left(\partial_\mu - ieA_\mu\right) - m\right\}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

これより $A_\mu(x)$ から $A_\nu(0)$ の伝播は以下で与えられる

$$
\begin{aligned}
Z =& \left\langle 0 \middle| T\left[\hat{A}_\mu(x)\hat{A}_\nu(0)\right] \middle| 0 \right\rangle \\
=& \int D\Phi A_\mu(x)A_\nu(0) e^{i\int d^4x\left[\bar{\psi}\{i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu)-m\}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right]}
\end{aligned}
$$

フーリエ変換を行い運動量表示にする.

$$
\begin{aligned}
&\int dx^4 \left\langle 0 \middle| T\left[\hat{A}_\mu(x)\hat{A}_\nu(0)\right] \middle| 0 \right\rangle e^{-iqx} \\
&= \int d^4x e^{-iqx} \int D\Phi A_\mu(x)A_\nu(0) e^{i\int d^4y \mathcal{L}_{QED}}
\end{aligned}
$$

e について展開し

$$
\begin{aligned}
&= \int d^4x e^{-iqx} \int D\Phi A_\mu(x)A_\nu(0) e^{i\int d^4y\left(\mathcal{L}_{QED} - \bar{\psi}\gamma^\mu eA_\mu\psi\right).} \\
&\times \left[1 + (ie)^1 \int dy_1 \bar{\psi}\left(y_1\right)\gamma^\mu A_\mu\left(y_1\right)\psi\left(y_1\right) + \frac{(ie)^2}{2}\iint dy_1 dy_2 \bar{\psi}\left(y_1\right)\gamma^\mu A_\mu\left(y_1\right)\psi\left(y_1\right)\bar{\psi}\left(y_2\right)\gamma^\mu A_\mu\left(y_2\right)\psi\left(y_2\right) + \cdots\right]
\end{aligned}
$$

今ループを計算したいので、e^2 の項のみを取り出す. それを I とする. ガンマが行列であることを強調して、

$$
\begin{aligned}
I = \frac{(ie)^2}{2}\int d^4x e^{-iqx}\int dy_1 dy_2 \int & D\Phi A_\mu(x)A_\nu(0) \\
& \times \bar{\psi}\left(y_1\right)_a \left(\gamma^\alpha\right)_{ab} \psi\left(y_1\right)_b A(y_1)_\alpha \\
& \times \bar{\psi}\left(y_2\right)_c \left(\gamma^\beta\right)_{cd} \psi\left(y_2\right)_d A(y_2)_\beta \\
& \times e^{iS_0}
\end{aligned}
$$

$\bar{\psi}, \psi$ がグラスマン数であることに注意して

$$
\begin{aligned}
= -\frac{(ie)^2}{2}\int d^4x e^{-iqx}\int dy_1 dy_2 \int & D\Phi A_\mu(x)A_\nu(0) A\left(y_1\right)_\alpha A\left(y_2\right)_\beta \\
& \times \psi\left(y_1\right)_b \bar{\psi}\left(y_2\right)_c \psi\left(y_2\right)_d \bar{\psi}\left(y_1\right)_a \\
& \times (\gamma^\alpha)_{ab}(\gamma^\beta)_{cd} \\
& \times e^{iS_0}
\end{aligned}
$$

今 Wick の定理より得たいダイアグラムに関する項は以下となる.

$$
\begin{aligned}
& \left\langle A_\mu(x) A_\alpha\left(y_1\right)\right\rangle \left\langle A_\nu(0) A_\beta\left(y_2\right)\right\rangle \\
& \left\langle \psi\left(y_1\right)_b \bar{\psi}\left(y_2\right)_c \right\rangle \left\langle \psi\left(y_2\right)_d \bar{\psi}\left(y_1\right)_a \right\rangle \\
+ & \left\langle A_\mu(x) A_\beta\left(y_2\right)\right\rangle \left\langle A_\alpha\left(y_1\right) A_\nu(0)\right\rangle \\
& \left\langle \psi\left(y_1\right)_b \bar{\psi}\left(y_2\right)_c \right\rangle \left\langle \psi\left(y_2\right)_d \bar{\psi}\left(y_1\right)_a \right\rangle
\end{aligned}
$$

これらは等しくて

$$
\begin{aligned}
= -(ie)^2 \int d^4x e^{-iqx} \int & dy_1 dy_2 D_{\mu\alpha}\left(x - y_1\right) D_{\nu\beta}\left(y_2\right) \\
& \times S\left(y_1 - y_2\right)_{bc} S\left(y_2 - y_1\right)_{da} \\
& \times \left(\gamma^\alpha\right)_{ab}\left(\gamma^\beta\right)_{cd}
\end{aligned}
$$

ただし、S, D_{ij} はそれぞれフェルミオンとベクトル場のプロパゲーターである. 現在用いている Lagrangian のゲージ対称性により、プロパゲーターが定まらなくなること (ゲージ対称性があると

演算子に対して固有値 0 に属する固有ベクトルが現れ、逆演算子であるプロパゲーターが定まらなくなる．積分が空回りする.) を防ぐため gauge 固定と呼ばれる人為的な項を導入することで gauge 対称性を破り、プロパゲーターが定まるようにする．そのフィックスタームとして以下がある.

$$\mathcal{L}_{gf} = -\frac{1}{2\xi}\left(\partial_\mu A^\mu\right)^2$$

これにより ξ 自由度が残るもののプロパゲーターは定まり

$$\rightarrow iD_{\mu\nu}(k) = \frac{-ie^2}{k^2}\left\{\eta_{\mu\nu} - (1-\xi)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right\}$$

一旦 $\xi = 1$ gauge なる gauge を用いて考えていく

$$\begin{aligned} D_{ij}(x) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ikx}\frac{i}{k^2}\left(-\eta_{ij}\right) \\ (S(x))_{ab} &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-iqx}\left(\frac{1}{\not{p} - m + i\varepsilon}\right)_{ab} \end{aligned}$$

上を計算に代入し

$$\begin{aligned} =&-e^2\int d^4x e^{-iqx}\int dy_1 dy_2 \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}\frac{d^4k_2}{(2\pi)^4}\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} \\ &\times\left(\frac{e^{-ik_1(x-y_1)}}{k_1^2}\eta_{\mu\alpha}\right)\left(\frac{e^{-ik_2y_2}}{k_2^2}\eta_{\nu\beta}\right)\left(e^{-ip_1(y_1-y_2)}\left(\frac{1}{\not{p}_1 - m + i\varepsilon}\right)_{bc}\right) \\ &\times\left(e^{-ip_2(y_2-y_1)}\left(\frac{1}{\not{p}_2 - m + i\varepsilon}\right)_{da}\right)(\gamma^\alpha)_{ab}(\gamma^\beta)_{cd} \end{aligned}$$

メトリックテンソルで縮約をとって

$$\begin{aligned} =&-e^2\int d^4x e^{-iqx}\int dy_1 dy_2 \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}\frac{d^4k_2}{(2\pi)^4}\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} \\ &\times\left(\frac{e^{-ik_1(x-y_1)}}{k_1^2}\right)\left(\frac{e^{-ik_2y_2}}{k_2^2}\right)\left(e^{-ip_1(y_1-y_2)}\left(\frac{1}{\not{p}_1 - m + i\varepsilon}\right)_{bc}\right) \\ &\times\left(e^{-ip_2(y_2-y_1)}\left(\frac{1}{\not{p}_2 - m + i\varepsilon}\right)_{da}\right)(\gamma_\mu)_{ab}(\gamma_\nu)_{cd} \end{aligned}$$

y_1, y_2 で積分し

$$\begin{aligned} =&-e^2\int d^4x e^{-iqx}\int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}\frac{d^4k_2}{(2\pi)^3}d^4p_1 d^4p_2\frac{1}{k_1^2}\frac{1}{k_2^2}e^{-ik_1x} \\ &\times\delta^{(4)}\left(k_1 - p_1 + p_2\right)\delta^{(4)}\left(k_2 + p_1 - p_2\right) \\ &\times\left(\gamma_\mu\right)_{ab}\left(\frac{1}{\not{p}_1 - m + i\varepsilon}\right)_{bc}\left(\gamma_\nu\right)_{cd}\left(\frac{1}{\not{p}_2 - m + i\varepsilon}\right)_{da} \end{aligned}$$

ここで $\mathrm{tr}(A_{a_1a_2}B_{a_2a_3}C_{a_3a_4}D_{a_4a_5}) = A_{a_1a_2}B_{a_2a_3}C_{a_3a_4}D_{a_4a_1}$ より

$$\begin{aligned} =&-e^2\int d^4x e^{-iqx}\int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}\frac{d^4k_2}{(2\pi)^3}d^4p_1 d^4p_2\frac{1}{k_1^2}\frac{1}{k_2^2}e^{-ik_1x} \\ &\times\delta^{(4)}\left(k_1 - p_1 + p_2\right)\delta^{(4)}\left(k_2 + p_1 - p_2\right) \\ &\times\mathrm{tr}\left(\gamma_\mu\frac{1}{\not{p}_1 - m + i\varepsilon}\gamma_\nu\frac{1}{\not{p}_2 - m + i\varepsilon}\right) \end{aligned}$$

k_1 で積分して

$$= - e^2 \int d^4x e^{-iqx} \int \frac{d^4k_2}{(2\pi)^8} d^4p_1 d^4p_2 \frac{e^{-i(p_1-p_2)x}}{(p_1-p_2)^2} \frac{1}{k_2^2}$$
$$\times \delta^{(4)} (k_2 + p_1 - p_2)$$
$$\times \operatorname{tr} \left(\gamma_\mu \frac{1}{\not{p}_1 - m + i\varepsilon} \gamma_\nu \frac{1}{\not{p}_2 - m + i\varepsilon} \right)$$

k_2 で積分して

$$= -e^2 \int d^4x e^{-iqx} \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} \frac{e^{-i(p_1-p_2)x}}{(p_1-p_2)^2} \frac{1}{(p_1-p_2)^2}$$
$$\times \operatorname{tr} \left(\gamma_\mu \frac{1}{\not{p}_1 - m + i\varepsilon} \gamma_\nu \frac{1}{\not{p}_2 - m + i\varepsilon} \right)$$

x で積分して

$$= -e^2 \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} d^4p_2 \frac{\delta^{(4)} (q + p_1 - p_2)}{(p_1-p_2)^4}$$
$$\times \operatorname{tr} \left(\gamma_\mu \frac{1}{\not{p}_1 - m + i\varepsilon} \gamma_\nu \frac{1}{\not{p}_2 - m + i\varepsilon} \right)$$

p_2 で積分して

$$= -\frac{e^2}{q^4} \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \operatorname{tr} \left(\gamma_\mu \frac{1}{\not{p}_1 - m + i\varepsilon} \gamma_2 \frac{1}{\not{p}_1 - \not{q} - m + i\varepsilon} \right)$$

改めて $p_1 = p$ として、q を切り落とせば

$$= -e^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \operatorname{tr} \left(\gamma_\mu \frac{1}{\not{p} - m + i\varepsilon} \gamma_2 \frac{1}{\not{p} - \not{q} - m + i\varepsilon} \right)$$

以上にて求めるべきダイアグラムの確率振幅が得られた.

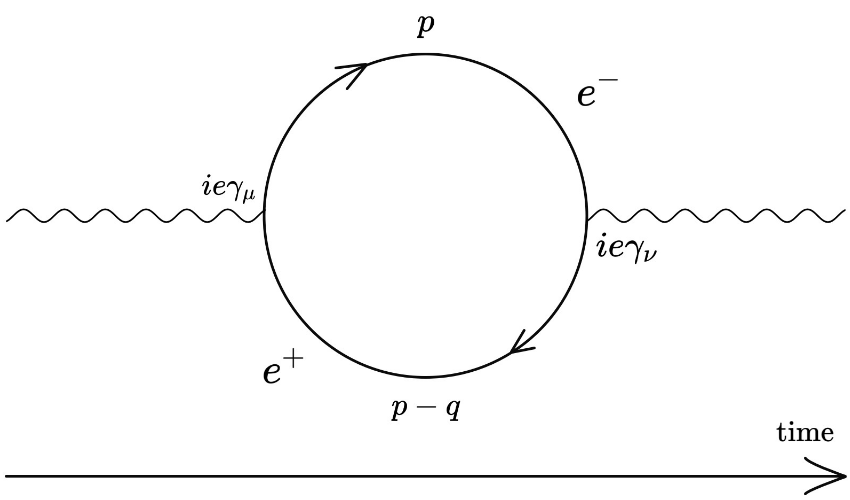


Figure 3: QED のループダイアグラム

それを $i\Pi^{\mu\nu}$ とすると

$$i\Pi_{\mu\nu}(q) = -e^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \operatorname{tr} \left(\gamma_\mu \frac{1}{\not{p} - m + i\varepsilon} \gamma_2 \frac{1}{\not{p} - \not{q} - m + i\varepsilon} \right)$$

しかしこの積分は発散するのでカットオフ Λ を導入して

$$i\Pi_{\mu\nu}(q) \equiv -e^2 \int^\Lambda \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \operatorname{tr} \left(\gamma_\mu \frac{1}{\not{p} - m + i\varepsilon} \gamma_\nu \frac{1}{\not{p} - \not{q} - m + i\varepsilon} \right)$$

これについて

$$\frac{1}{\gamma^\mu p_\mu - m} = \frac{\gamma^\mu p_\mu + m}{p^2 - m^2}$$

であることより

$$= -e^2 \int^\Lambda \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \mathrm{tr}\left[\frac{\gamma_\mu \left\{\gamma_a p^a + m\right) \gamma_\nu \left\{\gamma_b (p-q)^b + m\right\}}{(p^2 - m^2 + i\varepsilon)\left\{(p-q)^2 - m^2 + i\varepsilon\right\}}\right]$$

と変形される．ここで

$$\boxed{\frac{1}{xy} = \int_0^1 d\alpha \frac{1}{[\alpha x + (1-\alpha) y]^2}}$$

によって

$$= -e^2 \int^\Lambda \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int_0^1 d\alpha \frac{\mathrm{tr}\left[\gamma_\mu \left\{\gamma_a p^a + m\right\} \gamma_\nu \left\{\gamma_b (p-q)^b + m\right\}\right]}{\left[(p^2 - m^2 + i\varepsilon)\, \alpha + (1-\alpha)\left((p-q)^2 - m^2 + i\varepsilon\right)\right]^2}$$

$p \to p + q$ として

$$= -e^2 \int^\Lambda \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int_0^1 d\alpha \frac{\mathrm{tr}\left[\gamma_\mu \left\{\gamma_a (p+q)^a + m\right\} \gamma_\nu \left\{\gamma_b (p)^b + m\right\}\right]}{\left[((p+q)^2 - m^2 + i\varepsilon)\, \alpha + (1-\alpha)\left(p^2 - m^2 + i\varepsilon\right)\right]^2}$$

であるが分母は

$$\begin{aligned}
&\left((p+q)^2 - m^2 + i\varepsilon\right) \alpha + (1-\alpha)\left(p^2 - m^2 + i\varepsilon\right) \\
=&(p + \alpha q)^2 + \alpha(1-\alpha) q^2 - m^2 + i\varepsilon
\end{aligned}$$

と変形される．また分子を $N_{\mu\nu}$ と定義すると

$$N_{\mu\nu} = \mathrm{tr}\left[\gamma_\mu \left\{\gamma_a (l + q(1-\alpha))^a + m\right\} \gamma_\nu \left\{\gamma_b (l - \alpha q)^b + m\right\}\right]$$

ただし $l \equiv p + \alpha q$. ここでトレースの関係式

トレースの関係式

$$\begin{aligned}
&\mathrm{tr}\left(\gamma_a \gamma_b\right) = 4\eta_{ab} \\
&\mathrm{tr}\left(\gamma_a \gamma_b \gamma_c \gamma_d\right) = 4\left(\eta_{ab}\eta_{cd} - \eta_{ac}\eta_{bd} + \eta_{ad}\eta_{bc}\right) \\
&\mathrm{tr}\left(\gamma_{a_1} \cdots \gamma_{a_{2n-1}}\right) = 0
\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}
N_{\mu\nu} &= 4\left[\left(\eta_{\mu a}\eta_{\nu b} - \eta_{\mu\nu}\eta_{ab} + \eta_{\mu b}\eta_{av}\right)(l + q(1-\alpha))^a (l - \alpha q)^b + m^2 \eta_{\mu\nu}\right] \\
&= 4[\{l + q(1-\alpha)\}_\mu (l - \alpha q)_\nu - \eta_{\mu\nu}\{l + q(1-\alpha)\}(l - \alpha q) \\
&\qquad + \{l + q(1-\alpha)\}_\nu (l - \alpha q)_\mu + m^2 \eta_\mu]
\end{aligned}$$

展開して

$$\begin{aligned}
=&4\left[l_\mu l_\nu - \alpha l_\mu q_\nu + q_\mu l_\nu (1-\alpha) - \alpha(1-\alpha) q_\mu q_\nu\right. \\
&- \eta_{\mu\nu} l^2 + \eta_{\mu\nu}\alpha l q - \eta_{\mu\nu} q l (1-\alpha) + \eta_{\mu\nu} q^2 \alpha(1-\alpha) \\
&\left.+ l_\mu l_\nu - \alpha l_\nu q_\mu + (1-\alpha) q_\nu l_\mu - \alpha(1-\alpha) q_\mu q_\nu + m^2 \eta_{\mu\nu}\right]
\end{aligned}$$

ここで $p \to p - \alpha q$ とシフトする．また p^1 の項は奇関数の積分となり消えるため、あらためてそれを $N_{\mu\nu}$ とすると

$$N_{\mu\nu} = 4\left[2p_\mu p_\nu - \eta_{\mu\nu} p^2 - 2\alpha(1-\alpha) q_\mu q_\nu + \eta_{\mu\nu} q^2 \alpha(1-\alpha) + m^2 \eta_{\mu\nu}\right]$$

今公式

公式

$$\int d^4p(p_\mu p_\nu) = \int d^4p\frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}p^2$$

を用いて

$$= -4\left[\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}p^2 + \alpha(1-\alpha)\left(2q_\mu q_\nu - \eta_{\mu\nu}q^2\right) - m^2\eta_{\mu\nu}\right]$$

これより

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = 4e^2\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\int_0^1 d\alpha\frac{\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}p^2 + \alpha(1-\alpha)\left(2q_\mu q_\nu - \eta_{\mu\nu}q^2\right) - m^2\eta_{\mu\nu}}{\left[p^2 - c^2 + i\varepsilon\right]^2}$$

where$-c^2 = \alpha(1-\alpha)q^2 - m^2$ ここでカットオフの公式

Formula

$$\int^\Lambda\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{\left(k^2 - m^2 + i\varepsilon\right)^2} = \frac{i}{16\pi^2}\left[\log\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) - 1 + \cdots\right]$$

$$\int^\Lambda\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{k^2}{\left(k^2 - m^2 + i\varepsilon\right)^2} = \frac{-i}{16\pi^2}\left[\Lambda^2 - 2m^2\log\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) + m^2 + \cdots\right]$$

を用いて、それぞれ項別に積分を評価して

$$= 4e^2\int_0^1 d\alpha\left[\frac{-i\eta_{\mu\nu}}{32\pi^2}\left\{\Lambda^2 - 2c^2\log\left(\frac{\Lambda^2}{c^2}\right) + c^2 + \cdots\right\}\right.$$
$$\left. + \left\{\alpha(1-\alpha)\left(2q_\mu q_\nu - \eta_{\mu\nu}q^2\right) - m^2\eta_{\mu\nu}\right\}\frac{i}{16\pi^2}\left[\log\left(\frac{\Lambda^2}{c^2}\right) - 1 + \cdots\right]\right]$$

where $c^2 = m^2 - \alpha(1-\alpha)q^2$

$$= 4e^2\int_0^1 d\alpha\left[\log\left(\frac{\Lambda^2}{c^2}\right)\frac{i}{16\pi^2}\left\{\alpha(1-\alpha)\left(2q_\mu q_\nu - \eta_{\mu\nu}q^2\right) - m^2\eta_{\mu\nu} + c^2\eta_{\mu\nu}\right\}\right.$$
$$\left. - \frac{i}{16\pi^2}\left\{\alpha(1-\alpha)\left(2q_\mu q_\nu - \eta_{\mu\nu}q^2\right) - m^2\eta_{\mu\nu}\right\} + \frac{(-ic^2)}{32\pi^2}\eta_{\mu\nu} + \cdots\right]$$

c^2 を代入して

$$= 4e^2\int_0^1 d\alpha\left[\log\left(\frac{\Lambda^2}{c^2}\right)\frac{i}{8\pi^2}\left\{\alpha(1-\alpha)\left(q_\mu q_\nu - \eta_{\mu\nu}q^2\right)\right\}\right.$$
$$\left. - \frac{i}{16\pi^2}\left\{\alpha(1-\alpha)\left(2q_\mu q_\nu - \eta_{\mu\nu}q^2\right) - m^2\eta_{\mu\nu}\right\} + \frac{(-ic^2)}{32\pi^2}\eta_{\mu\nu} + \cdots\right]$$

よって最大の寄与は以下の積分となる.

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = \left(q_\mu q_\nu - \eta_{\mu\nu}q^2\right)\frac{e^2}{2\pi^2}\int_0^1 d\alpha\alpha(1-\alpha)\log\frac{\Lambda^2}{m^2 - \alpha(1-\alpha)q^2}$$

ただし $\Lambda^2 \to 0$ とした. これは次元正則化 (dimensional regularization) の結果を用いている.(付録)

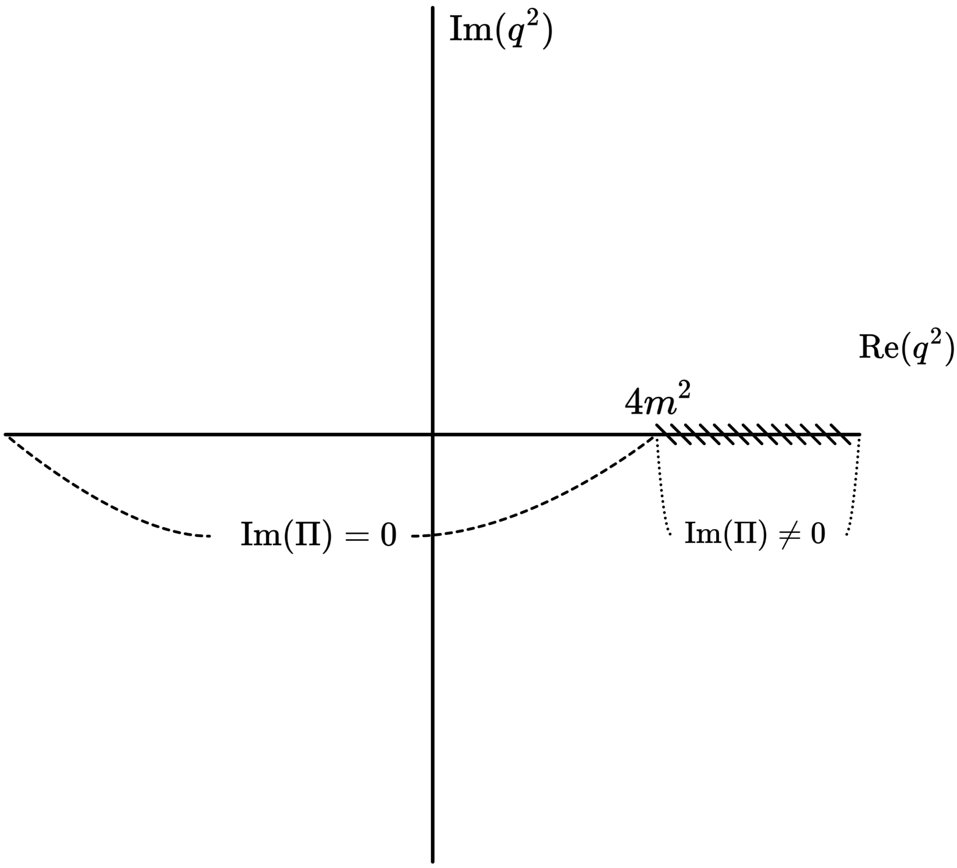


Figure 4: ブランチカットの様子

今、$q^2 > 4m^2$ として $\mathrm{Im}(\Pi_{\mu\nu}(q))$ が実質ループダイアグラムの寄与をもつとして、考察していきたい.(この考察の背景には光学定理がある.)

光学定理 (Optical theorem)

$$\langle f|2\,\mathrm{Im}(T)|i\rangle = \sum_n \left\langle f\left|T^\dagger\right|n\right\rangle \langle n|T|i\rangle$$

虚部を計算していき

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}\,\Pi\left(q^2\right) &= \frac{1}{2\pi^2}\,\mathrm{Im}\left(\int_0^1 d\alpha\alpha(1-\alpha)\left\{\log\Lambda^2 - \log e^{-\pi i}\left|m^2-\alpha(1-\alpha)q^2\right|\right\}\right. \\
&= \frac{1}{2\pi^2}\int_0^1 d\alpha a(1-\alpha)\pi\theta\left[\alpha(1-\alpha)q^2-m^2\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha_-}^{\alpha_+} d\alpha\alpha(1-\alpha) \quad \text{where} \quad \alpha_\pm = \frac{1}{2}\left(1\pm\sqrt{1-4m^2/q^2}\right)
\end{aligned}$$

を得る. あとは単純な積分の計算を行えばよく

$$\mathrm{Im}\,\Pi\left(q^2\right) = \frac{1}{12\pi}\sqrt{1-\frac{4m^2}{q^2}}\left(1+\frac{2m^2}{q^2}\right) \quad \left(q^2 > 4m^2\right)$$

となる. これが実際ループダイアグラムの確率をになっているかを調べるために、場の量子論におけ

るボゾンが二つのボゾンに崩壊するトイモデルにおける崩壊確率の式

$$\Gamma=\frac{g^2}{16\pi M^3}\sqrt{\left(M^2-(m+\mu)^2\right)\left(M^2-(m-\mu)^2\right)}$$

へ形式的に今考察している状況を代入すると

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{16\pi\sqrt{q^2}}\sqrt{1-\frac{4m^2}{q^2}}\\&\sim\frac{\mathrm{Im}\,\Pi\left(q^2\right)}{\sqrt{q^2}}\end{aligned}$$

実際に崩壊率を記述していることが確認できる．よって $\gamma\to e^{+}+e^{-}$ への崩壊率 Γ' は

$$\boxed{\Gamma'=\mathrm{Im}\,\Pi\left(q^2\right)=\frac{1}{12\pi}\sqrt{1-\frac{4m^2}{q^2}}\left(1+\frac{2m^2}{q^2}\right)\quad\left(q^2>4m^2\right)}$$

ここで重要なことは、$\gamma\to e^{+}+e^{-}$ に必要な光子のエネルギーまでも、場の量子論を用いて確認することができたのである．これは計算するまでもなく明らかであることに気が付く．光子が電子・陽電子対へ崩壊する最低エネルギーは、電子・陽電子対が静止系である場合であって、光子、電子・陽電子の運動量をそれぞれ q^μ,p_1^μ,p_2^μ とすると

$$p_1^\mu=p_2^\mu=(m_e,0,0,0)$$

エネルギー保存の法則より

$$q^\mu q_\mu=(p_1^\mu+p_2^\mu)(p_{\mu 1}+p_{\mu 2})=4m_e^2$$

であるから

$$q^\mu q_\mu>4m_e^2$$

でなければならなかったのである．

水素原子の励起状態の電子の崩壊確率について

QED Lagrangian を用いた、以下の計算から始めたい

$$\begin{aligned}Z&=\left\langle 0\left|T\left[\psi(x)\bar{\psi}(0)\right]\right|0\right\rangle\\&=\int D\psi D\bar{\psi}DA\psi(x)\bar{\psi}(0)e^{iS}\end{aligned}$$

ただし

$$S=\int d^4x\left[\bar{\psi}\left\{i\gamma^\mu\left(\partial_\mu-ieA_\mu\right)-m\right\}\psi-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right]$$

本当は $\psi(x),\bar{\psi(0)}$ はベクトルであるから、

$$Z=\left\langle 0\left|T\left[\psi(x)_\rho\bar{\psi}(0)_\sigma\right]\right|0\right\rangle$$

の様に書くべきだろう．一旦省略して、最後に付け加えようと思う．最終的に以下の diagram の確率振幅は

$$\Pi(q)_{\sigma\rho}=-e^2\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\left(\frac{1}{-\not{q}-m+i\varepsilon}\right)_{\sigma a}\left(\gamma^\alpha\right)_{ab}\left(\frac{1}{\not{p}-m+i\varepsilon}\right)_{bc}\left(\gamma^\beta\right)_{cd}\left(\frac{1}{-\not{q}-m+i\varepsilon}\right)_{d\rho}\cdot\frac{-i\eta_{\alpha\beta}}{(p+q)^2}$$

として得られる. 今からこれを示していきたい.

これもやはり e に対して展開していき、e^2 の項を求めていけばよく (S_0 は S から相互作用項を抜いたラグランジアンの作用. Φ は一般の場としている)

$$Z=\int D\Phi\psi(x)\psi(0)e^{iS_0}\left[1+ie\int dy\bar{\psi}\gamma^{\mu}A_{\mu}\psi+\frac{(ie)^2}{2}\int dy_1dy_2\left(\bar{\psi}\gamma^{\mu}A_{\mu}\psi\right)\left(\bar{\psi}\gamma^{\mu}A_{\mu}\psi\right)+\cdots\right]$$

ここで e^2 の項だけをとりだし

$$I=\frac{(ie)^2}{2}\int dy_1dy_2\int D\Phi\psi(x)\bar{\psi}(0)\bar{\psi}\left(y_1\right)\gamma^{\alpha}A_{\alpha}\left(y_1\right)\psi\left(y_1\right)\bar{\psi}\left(y_2\right)\gamma^{\beta}A_{\beta}\psi\left(y_2\right)e^{iS_0}$$

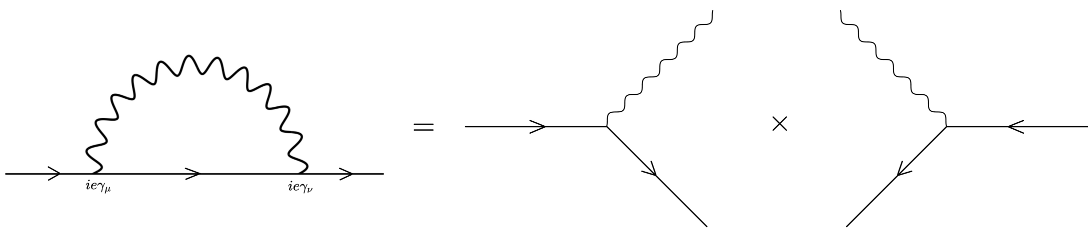
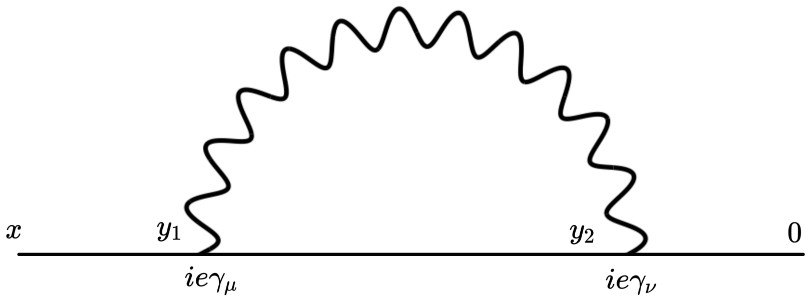


Figure 5: 電子から電子光子対の散乱とその確率密度



beginfigure[H] 計算するダイアグラム

ここで γ^i は行列であるから、行列成分としてかくと改めて積分の中身は

$$\psi(x)\bar{\psi}(0)\bar{\psi}\left(y_1\right)_a(\gamma^{\alpha})_{ab}A_{\alpha}\left(y_1\right)\psi\left(y_1\right)_b\bar{\psi}\left(y_2\right)_c(\gamma^{\beta})_{cd}A_{\beta}\left(y_2\right)\psi\left(y_2\right)_d$$

と書ける. 図に対応するように並び替え (グラスマン数を扱っていることに注意し)

$$\begin{aligned}&\psi(x)\bar{\psi}(0)\bar{\psi}\left(y_1\right)_a(\gamma^{\alpha})_{ab}A_{\alpha}\left(y_1\right)\psi\left(y_1\right)_b\bar{\psi}\left(y_2\right)_c(\gamma^{\beta})_{cd}A_{\beta}\left(y_2\right)\psi\left(y_2\right)_d\\=&\psi(x)\bar{\psi}\left(y_1\right)_a\psi\left(y_1\right)_b\bar{\psi}\left(y_2\right)_c\psi\left(y_2\right)_d\bar{\psi}(0)(\gamma^{\alpha})_{ab}A_{\alpha}\left(y_1\right)(\gamma^{\beta})_{cd}A_{\beta}\left(y_2\right)\end{aligned}$$

またこれはフェルミオンが $x\to y_2\to y_1\to 0$ と伝播しても同様であるから、対称因子として 2 が現れる.Wick の定理より

$$\Pi=-e^2\left(\gamma^{\alpha}\right)_{ab}\left(\gamma^{\beta}\right)_{cd}\int dy_1dy_2S\left(x-y_1\right)_aS\left(y_1-y_2\right)_{bc}S\left(y_2\right)_dD_{\alpha\beta}\left(y_1-y_2\right)$$

ここで上の $S,D_{\mu\nu}$ はフェルミオンとゲージ粒子のプロパゲーターであって

$$\begin{aligned}D_{ij}(x)&=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-ikx}\frac{i}{k^2}\left(-\eta_{ij}\right)\\S(x)&=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-iqx}\left(\frac{1}{\not{p}-m+i\varepsilon}\right)\end{aligned}$$

とすると

$$\Pi = -e^2\left(\gamma^\alpha\right)_{ab}\left(\gamma^\beta\right)_{cd}\int dy_1dy_2\int\frac{dp_1{}^4}{(2\pi)^4}\frac{dp_2^4}{(2\pi)^4}\frac{d^4p_3}{(2\pi)^4}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-ip_1(x-y_1)-ip_2(y_1-y_2)-ip_3y_2-ik(y_1-y_2)}$$
$$\times\left(\frac{1}{\not p_3-m+i\varepsilon}\right)_a\cdot\left(\frac{1}{\not p_2-m+i\varepsilon}\right)_{bc}\cdot\left(\frac{1}{\not p_1-m+i\varepsilon}\right)_d\cdot\frac{-i\eta_{\alpha\beta}}{k^2}$$

y_1,y_2 で積分し

$$= -e^2\left(\gamma^\alpha\right)_{ab}\left(\gamma^\beta\right)_{cd}\int\frac{dp_1{}^4}{(2\pi)^4}\frac{dp_2^4}{(2\pi)^4}d^4p_3d^4k\cdot e^{-ip_1x}\delta^{(4)}(p_1-p_2-k)\delta^{(4)}(p_2+k-p_3)$$
$$\times\left(\frac{1}{\not p_1-m+i\varepsilon}\right)_a\cdot\left(\frac{1}{\not p_2-m+i\varepsilon}\right)_{bc}\cdot\left(\frac{1}{\not p_3-m+i\varepsilon}\right)_d\cdot\frac{-i\eta_{\alpha\beta}}{k^2}$$

p_1 で積分して

$$= -e^2\left(\gamma^\alpha\right)_{ab}\left(\gamma^\beta\right)_{cd}\int\frac{dp_2^4}{(2\pi)^8}d^4p_3d^4k\cdot e^{-i(p_2+k)x}\delta^{(4)}(p_2+k-p_3)$$
$$\times\left(\frac{1}{\not p_2+\not k-m+i\varepsilon}\right)_a\cdot\left(\frac{1}{\not p_2-m+i\varepsilon}\right)_{bc}\cdot\left(\frac{1}{\not p_3-m+i\varepsilon}\right)_d\cdot\frac{-i\eta_{\alpha\beta}}{k^2}$$

k で積分して

$$= -e^2\left(\gamma^\alpha\right)_{ab}\left(\gamma^\beta\right)_{cd}\int\frac{dp_2^4}{(2\pi)^8}d^4p_3\cdot e^{-ip_3x}$$
$$\times\left(\frac{1}{\not p_3-m+i\varepsilon}\right)_a\cdot\left(\frac{1}{\not p_2-m+i\varepsilon}\right)_{bc}\cdot\left(\frac{1}{\not p_3-m+i\varepsilon}\right)_d\cdot\frac{-i\eta_{\alpha\beta}}{(p_2-p_3)^2}$$

ここで Fourier 変換

$$\Pi(q) = \int\frac{d^4x}{(2\pi)^4}\Pi(x)e^{-iqx}$$

にて、x の積分はデルタ関数として

$$\Pi(q) = -e^2\left(\gamma^\alpha\right)_{ab}\left(\gamma^\beta\right)_{cd}\int\frac{dp_2^4}{(2\pi)^4}d^4p_3\cdot\delta^{(4)}(q+p_3)$$
$$\times\left(\frac{1}{\not p_3-m+i\varepsilon}\right)_a\cdot\left(\frac{1}{\not p_2-m+i\varepsilon}\right)_{bc}\cdot\left(\frac{1}{\not p_3-m+i\varepsilon}\right)_d\cdot\frac{-i\eta_{\alpha\beta}}{(p_2-p_3)^2}$$

ここで p_3 で積分し

$$\Pi(q) = -e^2\left(\gamma^\alpha\right)_{ab}\left(\gamma^\beta\right)_{cd}\int\frac{dp_2^4}{(2\pi)^4}$$
$$\times\left(\frac{1}{-\not q-m+i\varepsilon}\right)_a\cdot\left(\frac{1}{\not p_2-m+i\varepsilon}\right)_{bc}\cdot\left(\frac{1}{-\not q-m+i\varepsilon}\right)_d\cdot\frac{-i\eta_{\alpha\beta}}{(p_2+q)^2}$$

よって

$$\Pi(q) = -e^2\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\left(\frac{1}{-\not q-m+i\varepsilon}\right)_a\left(\gamma^\alpha\right)_{ab}\left(\frac{1}{\not p-m+i\varepsilon}\right)_{bc}\left(\gamma^\beta\right)_{cd}\left(\frac{1}{-\not q-m+i\varepsilon}\right)_d\cdot\frac{-i\eta_{\alpha\beta}}{(p+q)^2}$$

これはトレースにはならないことが容易にわかる．最初に書いたようにベクトルとして $\psi(x)_\sigma,\psi(0)_\rho$ と書けば

$$\Pi(q)_{\sigma\rho} = -e^2\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\left(\frac{1}{-\not q-m+i\varepsilon}\right)_{\sigma a}\left(\gamma^\alpha\right)_{ab}\left(\frac{1}{\not p-m+i\varepsilon}\right)_{bc}\left(\gamma^\beta\right)_{cd}\left(\frac{1}{-\not q-m+i\varepsilon}\right)_{d\rho}\cdot\frac{-i\eta_{\alpha\beta}}{(p+q)^2}$$

ここで被積分関数は

$$\left(\frac{1}{p^\mu\gamma_\mu - m + i\varepsilon}\right)_{bc}\frac{1}{(p+q^2)} = \left(\frac{p^\mu\gamma_\mu + m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}\right)_{bc}\cdot\frac{1}{(p+q)^2}$$

である. よって以下の積分 H を評価すればよい.

$$H(q) = (\gamma_\mu)_{bc}\int d^4p\frac{p^\mu}{(p^2-m^2+i\varepsilon)(p+q)^2} + m\int d^4p\frac{1}{(p^2-m^2+i\varepsilon)(p+q)^2}$$

この評価については

公式

$$\frac{1}{xy} = \int_0^1 d\alpha\frac{1}{[\alpha x + (1-\alpha)y]^2}$$

を使用すればよい. これを用いて分母は

$$\begin{aligned}&(p-\alpha q)^2 + 2q(p-\alpha q) + \alpha q^2(1-\alpha) - m^2\alpha + q^2\\ =&\alpha\left(p^2-m^2\right) + (1-\alpha)(p+q)^2\end{aligned}$$

となるが、何回かシフトして (積分が収束すると仮定している.)

$$\begin{aligned}&\alpha\left(p^2-m^2\right) + (1-\alpha)(p+q)^2\\ \to\quad &(p+q)^2 + \alpha q^2(1-\alpha) - m^2\alpha \qquad (p\to p+\alpha q)\\ \to\quad &p^2 + \alpha q^2(1-\alpha) - m^2a \qquad (p\to p-q)\end{aligned}$$

を得る.$c^2 = -\{\alpha q^2(1-\alpha) - m^2\alpha\}$ として

$$\begin{aligned}H(q) = (\gamma_\mu)_{bc}&\int d^4p\int_0^1 d\alpha\frac{p^\mu - q^\mu + \alpha q^\mu}{(p^2-c^2+i\varepsilon)^2}\\ &+ m\int d^4p\int_0^1 d\alpha\frac{1}{(p^2-c^2+i\varepsilon)^2}\end{aligned}$$

を得る. ここで p^μ の項は奇関数となるので

$$H(q) = \int_0^1 d\alpha\left\{(\gamma_\mu)_{bc}q^\mu(\alpha-1) + m\right\}\int d^4p\frac{1}{(p^2-c^2+i\varepsilon)^2}$$

積分は有限と定義していたから、はじめからカットオフが入っていたと思って

$$\int^\Lambda d^4p\frac{1}{(p^2-c^2+i\varepsilon)^2} = \pi^2 i\left[\log\left(\frac{\Lambda^2}{c^2}\right) - 1 + \cdots\right]$$

という公式にて

$$H(q) = \int_0^1 d\alpha\left\{(\gamma_\mu)_{bc}q^\mu(\alpha-1) + m\right\}\pi^2 i\left[\log\left(\frac{\Lambda^2}{c^2}\right) - 1 + \cdots\right]$$

$|p| >> 1$ の寄与にて log の項の寄与のみが大きいため実質

$$\sim\int_0^1 d\alpha\left\{(\gamma_\mu)_{bc}q^\mu(\alpha-1) + m\right\}\pi^2 i\log\left(\frac{\Lambda^2}{m^2\alpha - \alpha q^2(1-\alpha)}\right)$$

となる. 今この関数 q^2 の関数として虚になる場合を考察する. これは単純に

$$\begin{aligned}&m^2a - \alpha q^2(1-\alpha) < 0\\ \Rightarrow &q^2 > \frac{m^2}{1-\alpha} > m^2\end{aligned}$$

でなければならないことがわかる. よって電子が電子と光子対に必要な運動量は m^2 よりも大きくなければならない.

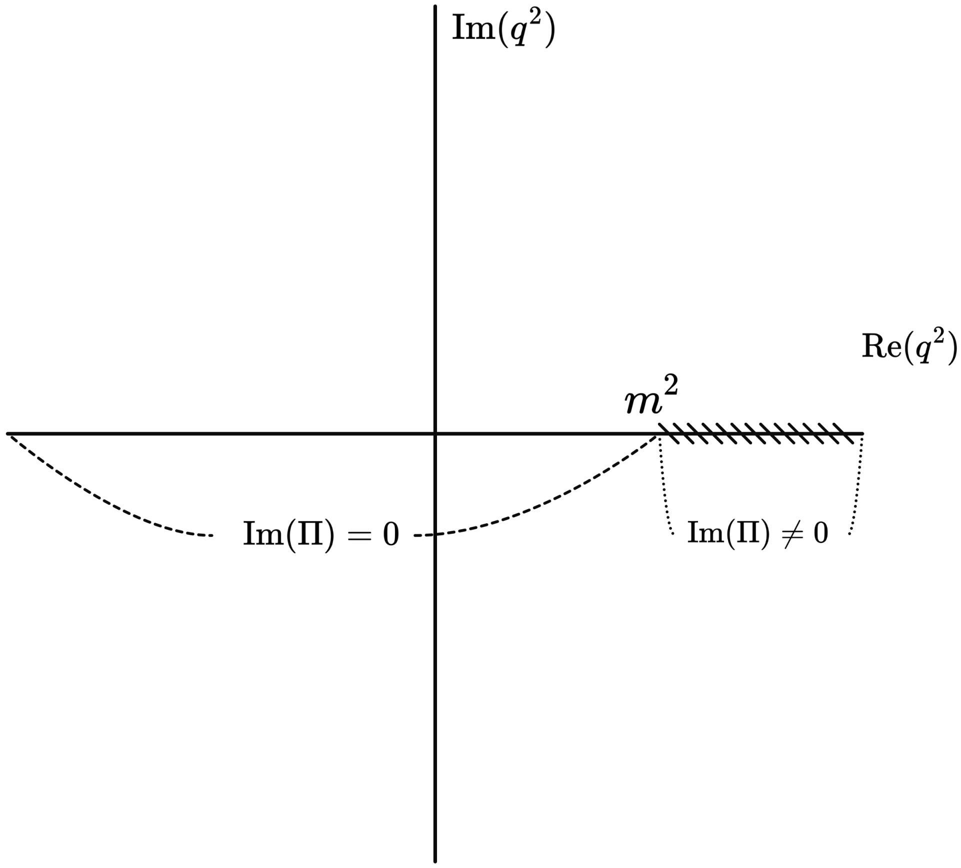


Figure 6: ブランチカットの様子

また $\mathrm{Im}(H(q^2)) \neq 0$ なる条件は

$$\alpha_+, \alpha_- = 0, 1 - \frac{m^2}{q^2}$$

これより

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}\left(H\left(q^2\right)\right) &= -\pi^2 i \int_0^1 d\alpha \left\{ (\gamma_\mu)_{bc}\, q^\mu(\alpha - 1) + m \right\} (+\pi i)\theta\left(m^2\alpha - \alpha q^2(1-\alpha)\right) \\
&= \pi^3 \int_0^{1-\frac{m^2}{q^2}} d\alpha \left\{ (\gamma_\mu)_{bc}\, q^\mu(\alpha - 1) + m \right\}.
\end{aligned}$$

計算して

$$= \pi^3 \left[\frac{1}{2} (\gamma_\mu)_{bc}\, q^\mu \left(1 - \frac{m^2}{q^2}\right)^2 + \left(m - (\gamma_\mu)_{bc}\, q^\mu\right) \left(1 - \frac{m^2}{q^2}\right) \right]$$

整理して

$$= \frac{\pi^3}{2q^4}(m+q)(m-q)\left[m^2 q^\mu (\gamma_\mu)_{bc} + q^2 q^\mu (\gamma_\mu)_{bc} - 2mq^2\right]$$

よって、元の式に代入することで

$$
\mathrm{Im}\left(\Pi(q)\right)_{\sigma\rho} = +\frac{ie^2}{4\pi}\left(m^2 - q^2\right)\left(\frac{1}{-\not{q} - m + i\varepsilon}\right)_{\sigma a}\left(\gamma_\beta\right)_{ab}\left(m^2\not{q} + q^2\not{q} - 2mq^2\right)_{bc}
$$

$$
\left(\gamma^\beta\right)_{cd}\left(\frac{1}{-\not{q} - m + i\varepsilon}\right)_{d\rho} \quad \left(q^2 > m^2\right)
$$

Appendix (dimensional regularization)

以下の積分について

$$
I = \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{1}{\left(k^2 - c^2 + i\varepsilon\right)^2}
$$

次の等式を示したい

$$
\boxed{\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{1}{\left(k^2 - c^2 + i\varepsilon\right)^2} = i\frac{1}{(4\pi)^{d/2}}\Gamma\left(\frac{4-d}{2}\right)c^{d-4}}
$$

先ず Wick 回転にてユークリッド化を行う.

$$
= \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}}\int dk^0 \frac{1}{\left\{\left(k^0\right)^2 - \vec{k}^2 - c^2 + i\varepsilon\right\}^2}
$$

$$
\equiv \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}}\int dk^0 \frac{1}{\left\{\left(k^0\right)^2 - \omega^2 + i\varepsilon\right\}^2}
$$

この k^0 の積分は以下のように極をまたぎ、Cauchy の積分定理より

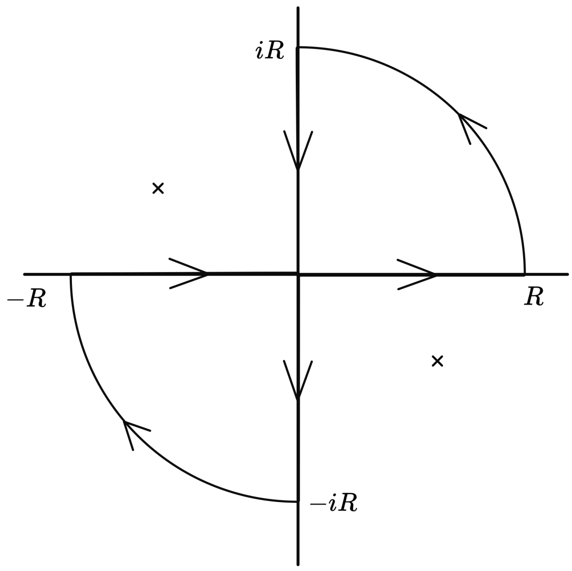


Figure 7: 積分路

$$
\int_{-R}^{R} dx\frac{1}{\left(x^2 - \omega^2 + i\varepsilon\right)^2} + \int_{iR}^{-iR} dx\frac{1}{\left(x^2 - \omega^2 + i\varepsilon\right)^2} = 0
$$

$R \to \infty$ にて

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1}{\left(x^2-\omega^2+i\varepsilon\right)^2} = \int_{-i\infty}^{+i\infty} dx \frac{1}{\left(x^2-\omega^2+i\varepsilon\right)^2}$$

右辺に対して $x' = -ix$ として

$$\begin{aligned} &= i\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1}{\left((ix)^2-\omega^2+i\varepsilon\right)^2} \\ &= i\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1}{\left(-x^2-\omega^2+i\varepsilon\right)^2} \\ &\to i\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1}{\left(x^2+\omega^2\right)^2} \quad (\varepsilon \to 0) \end{aligned}$$

よって

$$\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^\mu k_\mu - c^2 + i\varepsilon)^2} = i\int \frac{d_E^dk}{(2\pi)^d} \frac{1}{\left(|\vec{k}|^2+c^2\right)^2}$$

d 元内積とユークリッド内積を区別するために、あえて露に d 元内積を $k^\mu k_\mu$ と書いている. ユークリッド化が完了したので、あとは d 次元極座標変換を行えば良い. d 次元極座標変換の一般式とそれに伴うヤコビヤンは公式として存在するが、ここでは A.Zee 先生の付録記載の方法でヤコビヤンを求めたい.

極座標変換に伴うヤコビヤンはどの被積分関数に対しても一意的であるため、$e^{-k^2/2}$ としてよい. 今極座標変換によって左辺から右辺になったとする.

$$\int d_E^dk e^{-\frac{1}{2}k^2} = C(d)\int_0^\infty drr^{d-1}e^{-\frac{1}{2}r^2}$$

Gauss 積分の公式より左辺は

$$(2\pi)^{\frac{d}{2}} = C(d)\int_0^\infty drr^{d-1}e^{-\frac{1}{2}r^2}$$

変数変換 $x = \frac{r^2}{2} \quad \left(dr = \frac{dx}{\sqrt{2x}}\right)$ を行い

$$\begin{aligned} &= C(d)2^{\frac{d}{2}-1}\int_0^\infty dxx^{\frac{d}{2}-1}e^{-x} \\ &= C(d)2^{\frac{d}{2}-1}\Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \end{aligned}$$

よって

$$C(d) = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}$$

であるから、一般的な関数にたいして

$$\boxed{\int d_E^dk\ F\left(|\vec{k}|^2\right) = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}\int_0^\infty drr^{d-1}F\left(r^2\right)}$$

が成立する. これより I は

$$I = i\frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)(2\pi)^d}\int dr\frac{r^{d-1}}{\left(r^2+c^2\right)^2}$$

と求められる.
今変数変換

$$r^2+c^2=\frac{c^2}{x}$$

を行えば $r=c\sqrt{\frac{1}{x}-1}\quad(r>0)$ であるから $dr=\frac{-c}{2x^2\sqrt{1/x-1}}dx$ また $\begin{array}{c|c} r & 0\to\infty \\ \hline x & 1\to 0\end{array}$ より

$$\begin{aligned}
&=i\frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)(2\pi)^d}\int_0^1 dx\left(\frac{c}{2x^2\sqrt{1/x-1}}\right)\frac{(c\sqrt{1/x-1})^{d-1}}{\left(c^2/x\right)^2}\\
&=i\frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)(2\pi)^d}c^{d-4}\frac{1}{2}\int_0^1 dx\left(\frac{1}{x}-1\right)^{\frac{d}{2}-1}\\
&=i\frac{\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)(2\pi)^d}c^{d-4}\int_0^1 dx x^{1-\frac{d}{2}}(1-x)^{\frac{d}{2}-1}
\end{aligned}$$

と変形されていく. ここでこれがベータ関数

$$B(s,t)=\int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1}\ \mathrm{d}x$$

の形で表されることに気が付く.

$$\left\{\begin{array}{l} s-1=1-\frac{d}{2}\\ t-1=\frac{d}{2}-1\end{array}\right.$$

として

$$I=i\frac{\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)(2\pi)^d}c^{d-4}B\left(2-\frac{d}{2},\frac{d}{2}\right)$$

と書き直される. さらにベータ関数とガンマ関数の関係式

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

にて

$$\begin{aligned}
I&=i\frac{\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)(2\pi)^d}c^{d-4}\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\\
&=i\frac{\pi^{d/2}}{(2\pi)^d}c^{d-4}\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)
\end{aligned}$$

を得る. 以上にて示された.
これに対して $d\to 4$ とすると

$$i\frac{1}{(4\pi)^2}\left[\frac{2}{4-d}-\log c^2+\log(4\pi)-\gamma+O(d-4)\right]$$

0.1 p^2 を含んでいる場合

$$\begin{aligned}
\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{k^2}{\left(k^2-c^2+i\varepsilon\right)^2}&=i\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{-|\vec{k}|^2}{\left(|\vec{k}|^2+c^2\right)^2}\\
&=\frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}(-i)\int_0^\infty\frac{dr}{(2\pi)^d}r^{d-1}\frac{r^2}{\left(r^2+c^2\right)^2}
\end{aligned}$$

同様の変数変換にて

$$= \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \frac{(-i)}{(2\pi)^d} \int_0^1 dx \left[\frac{c}{2x^2\sqrt{1/x-1}} \right] \frac{(c\sqrt{1/x-1})^{d+1}}{(c^2/x)^2}$$

計算していき

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \frac{(-i)}{(2\pi)^d} c^{d-2} \int_0^1 dx x^{-d} (1-x)^d \\
&= \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \frac{(-i)}{(2\pi)^d} c^{d-2} B(1-d, 1+d) \\
&= \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \frac{(-i)}{(2\pi)^d} c^{d-2} \Gamma(1-d)\Gamma(1+d)
\end{aligned}$$

ここで $d=4$ におけるローラン展開は

$$\frac{4}{d-4} + (2\gamma - 1) + \frac{1}{12}\left(6 - 6\gamma + 6\gamma^2 + 7\pi^2\right)(d-4) + O(d-4)$$

であるから、$d=4$ において 1 次的な発散を示す. まとめて

次元正則化 (Dimensional Regularization) の公式

$$\int \frac{dk^4}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - c^2 + i\varepsilon)^2} = \frac{i}{16\pi^2} \lim_{d\to 4} \left[\frac{2}{4-d} - \log c^2 + \log(2\pi) - \gamma + O(d-4) \right]$$

$$\int \frac{dk^4}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{(k^2 - c^2 + i\varepsilon)^2} = \frac{ic^2}{16\pi^2} \lim_{d\to 4} \left[\frac{4}{4-d} + (1 - 2\gamma) + O(d-4) \right]$$

ただし γ はオイラー数で

$$\gamma := \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \right)$$

である.