以上にて示された.(解答終)
****

6 真空エネルギー

自由場における期待値

$$\langle 0|H|0\rangle = \int d^D x \frac{1}{2} \left\langle 0 \left| \pi^2 + (\nabla\varphi)^2 + m^2\varphi^2 \right| 0 \right\rangle$$

を計算したい. まずこれまで計算してきたように

$$\langle 0|\varphi(\vec{x},t)\varphi(\vec{x},t)|0\rangle = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D 2\omega}$$

である. なぜなら

$$\varphi(\vec{x},t)\varphi(\vec{x},t) = \int \frac{d^D k d^D k'}{\rho_k \rho_{k'}} \left[a(\vec{k})a(\vec{k'})e^{-i(k+k')x} + a(\vec{k})a^\dagger(\vec{k'})e^{-i\left(k-k'\right)x} + \cdots + a^\dagger(\vec{k})a^\dagger(\vec{k'})e^{i(k-k')x} \right]$$

であって、真空ブラケットを挟み込み

$$\langle 0|\varphi(\vec{x},t)\varphi(\vec{x},t)|0\rangle = \int \frac{d^D k d^D k'}{\rho_k \rho_{k'}} \delta^{(D)}(\vec{k}-\vec{k})e^{-i\left(k-k'\right)x}$$

k' で積分して

$$= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D 2\omega}$$

となる. これを用いて

$$\begin{aligned}\langle 0|H|0\rangle &= V\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D 2\omega} \frac{1}{2}\left(\omega^2 + \vec{k}^2 + m^2\right) \\ &= V\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{2}\hbar\omega\end{aligned}$$

敢えて $\hbar$ をあらわに書いたのは、調和振動子のエネルギーを示すためである.

7 Notes

生成消滅演算子の交換関係式から以下は容易に示せる.

$$\left\langle 0 \left| a_4 a_3 a_2^\dagger a_1^\dagger \right| 0 \right\rangle = \delta_{23}\delta_{14} - \delta_{24}\delta_{13}$$

問

φ を複素スカラー場とする. このとき

$$\begin{aligned}\left[a(\vec{k}), a^\dagger\left(\overrightarrow{k'}\right)\right] = \left[b(\vec{k}), b^\dagger\left(\overrightarrow{k'}\right)\right] = \delta^{(D)}\left(\vec{k} - \overrightarrow{k'}\right) \\ \left[a(\vec{k}), b\left(\vec{k'}\right)\right] = \left[a(\vec{k}), b^\dagger\left(\overrightarrow{k'}\right)\right] = 0\end{aligned}$$

を正準交換関係

$$\left[\pi(\vec{x},t), \varphi\left(\overrightarrow{x'},t\right)\right] = \left[\partial_0\varphi^\dagger(\vec{x},t), \varphi\left(\overrightarrow{x'},t\right)\right] = -i\delta^{(D)}\left(\overrightarrow{x'} - \vec{x}\right)$$

から示せ.

(解答)

フーリエ変換より

$$\varphi(\vec{x},t)=\int\frac{d^Dk}{\rho_k}\left[a(\vec{k})e^{-ikx}+b^\dagger(\vec{k})e^{ikx}\right]$$
$$\varphi^\dagger(\vec{x},t)=\int\frac{d^Dk}{\rho_k}\left[a^\dagger(\vec{k})e^{ikx}+b(\vec{k})e^{-ikx}\right]$$
$$\pi(\vec{x},t)=i\int\frac{d^Dk}{\rho_k}\omega\left[a^\dagger(\vec{k})e^{ikx}-b(\vec{k})e^{-ikx}\right]$$

であったのだから

$$\begin{aligned}\frac{\partial^\dagger\varphi(\vec{x},t)}{\partial t}\cdot\varphi(\vec{x'},t)=i\int\frac{d^Dkd^Dk'}{\rho_k\rho_{k'}}\omega\Big[&a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k'})e^{i\left(kx-k'x\right)}+a^\dagger(\vec{k})b^\dagger(\vec{k'})e^{i\left(kx+k'x'\right)}\\&-b(\vec{k})a(\vec{k'})e^{-i\left(kx+k'x'\right)}\\&-b(\vec{k})b^\dagger\left(\overrightarrow{k'}\right)e^{-i\left(kx-k'x'\right)}\Big]\end{aligned}$$

これより交換関係 $\left[\pi(\vec{x},t),\varphi\left(\overrightarrow{x'},t\right)\right]$ は

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi^\dagger(\vec{x},t)}{\partial t}\varphi\left(\overrightarrow{x'},t\right)-\varphi(\vec{x},t)\frac{\partial\varphi^\dagger\left(\overrightarrow{x'},t\right)}{\partial t}=i\int\frac{d^Dkdd^Dk'}{\rho_k\rho_{k'}}\omega\Big[&\left[a^\dagger(\vec{k}),a\left(\overrightarrow{k'}\right)\right]e^{i\left(kx-k'x'\right)}\\&+\left[a^\dagger(\vec{k}),b^\dagger\left(\overrightarrow{k'}\right)\right]e^{ikx+ik'x'}\\&-[b(\vec{k}),a(\vec{k'})]e^{-ikx-ik'x'}\\&-\left[b(\vec{k}),b^\dagger\left(\overrightarrow{k'}\right)\right]e^{-ikx+ik'x'}\Big]\end{aligned}$$

これがデルタ関数

$$-i\delta^{(D)}\left(\vec{x}-\overrightarrow{x'}\right)=-i\int\frac{d^Dk}{(2\pi)^D}e^{-ik\left(\vec{x}-\overrightarrow{x'}\right)}$$

と等しいためには、生成消滅演算子が表題の関係を満たす場合に限る. 以上にて示された.(解答終)
****

問

複素スカラー場のチャージ Q に対して

$$Qa^\dagger(\vec{k})|0\rangle=a^\dagger(\vec{k})|0\rangle$$

が成立することを示せ

(解答)

$$\begin{aligned}Qa^\dagger|0\rangle&=\int d^Dk'\left[a^\dagger\left(\overrightarrow{k'}\right)a\left(\overrightarrow{k'}\right)-b^\dagger\left(\overrightarrow{k'}\right)b(\vec{k'})\right]a^\dagger(\vec{k})|0\rangle\\&=\int d^Dk'a^\dagger\left(\overrightarrow{k'}\right)\delta^{(0)}\left(\vec{k}-\vec{k'}\right)|0\rangle-\int d^Dk'b^\dagger\left(\overrightarrow{k'}\right)b(\vec{k'})a^\dagger(\vec{k})|0\rangle\end{aligned}$$

ここで a,b は可換であることと、第一項については k' で積分を行い

$$=a^\dagger(\vec{k})|0\rangle$$

(解答終)
****

問

以下を示せ.

$$\left\langle 0 \left| T \left[\varphi(x)\varphi^\dagger(y) \right] \right| 0 \right\rangle = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D 2\omega} \left[\theta\left(x^0 - y^0\right) e^{-ik(x-y)} + \theta\left(y^0 - x^0\right) e^{ik(x-y)} \right]$$
$$= iD(x-y)$$

References

[1] Quantum Field Theory in a Nutshell(A.Zee)