1.8 Quantizing Canonically (A.Zee)

Misaki Ohta,University of the Ryukyus *

October 26, 2022

Abstract

量子力学で学習してきた生成消滅演算子を場の理論でも定義し、それを用いて表される T 積が、これまで計算してきた経路積分のプロパゲーターと等価であることを示す. 最初に生成消滅演算子とその交換関係の復習、正準運動量密度の定義を行い、T 積がプロパゲーターと等価であることを示したのち、これら演算子を用いて散乱振幅の簡単な計算を行う. 次に複素スカラー場とそこでの生成消滅演算子について簡単に触れる. 最後に真空エネルギーを生成消滅演算子を用いて求める.

1　演算子と交換関係

古典ラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - V(q)$$

と表されてるのであった (ただし $m = 1$). また正準運動量は

$$p \equiv \frac{\delta L}{\delta \dot{q}} = \dot{q}$$

と定義されている. 加えてハミルトニアンは

$$\begin{aligned} H &\equiv p\dot{q} - L \\ &= \frac{1}{2}\dot{q}^2 + V(q) \end{aligned}$$

で与えられている. ハイゼンベルクはこれらについて座標 $q(t)$ と運動量 $p(t)$ が以下の関係式を満たす様にした.

$$[p, q] = -i$$

これよりただちに

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = i[H, p] = -V'(q) \\ \frac{dq}{dt} = i[H, q] = p \end{cases}$$

ディラックの方法に従い生成消滅演算子を以下のように定めると

$$a \equiv \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\omega q + ip).$$

これは

$$\left[a, a^\dagger\right] = 1$$

を満たすことが簡単に確かめられる.

*Department of physics, Email: e193225@eve.u-ryukyu.ac.jp or apple.designed@icloud.com

計算

$$\left[a, a^\dagger\right] = 1$$

を示せ.

(解答)

$$a \equiv \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\omega q + ip).$$
$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\omega q - ip)$$

より

$$\begin{aligned} aa^\dagger &= \frac{1}{2\omega}(\omega q + ip)(\omega q - ip) \\ &= \frac{1}{2\omega}\left(\omega^2 q^2 + \omega + p^2\right) \\ a^\dagger a &= \frac{1}{2\omega}(\omega q - ip)(\omega q + ip) \\ &= \frac{1}{2\omega}\left(\omega^2 q^2 - \omega + p^2\right) \end{aligned}$$

これらより

$$\left[a, a^\dagger\right] = \frac{1}{2\omega}(2\omega) = 1$$

(解答終)

****

またこの演算子 $a(t)$ は以下を満たすことも示される.

計算

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= i\left[H, \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\omega q + ip)\right] \\ &= -i\sqrt{\frac{\omega}{2}}\left(ip + \frac{1}{\omega}V'(q)\right) \end{aligned}$$

(解答) 二番目の式を示し、そのあと一番の式を示す. 演算子 $a(t)$ は

$$a \equiv \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\omega q + ip)$$

であるから

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\omega q + ip)\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\omega \dot{q} + i\dot{p}). \end{aligned}$$

ここで

$$\dot{p} = -V'(q)$$

でもあったから、代入して

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}\left(\omega p - iV'(q)\right)$$

整理して

$$= -i\sqrt{\frac{\omega}{2}}\left(ip + \frac{V'(q)}{\omega}\right)$$

これにて 2 番目は示された. 次にこれから 1 番目を示す.
****

既に量子力学で学んだ様に、真空状態はこれを用いて

$$a|0\rangle = 0.$$

と定義されている. 特にポテンシャルが

$$V'(q) = \omega^2 q$$

であるとき、演算子 $a(t)$ の時間微分は

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= -i\sqrt{\frac{\omega}{2}}\left(ip + \frac{1}{\omega}V'(q)\right) \\
&= -i\sqrt{\frac{\omega}{2}}(ip + \omega q) \\
&= -i\omega\sqrt{\frac{1}{2\omega}}(ip + \omega q) \\
&= -i\omega a
\end{aligned}$$

と計算される. またこの時のラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{1}{2}\omega^2 q^2$$

と表される. 多粒子の場合も簡単にラグランジアンは一般化され

$$L = \sum_a \frac{1}{2}\dot{q}_a^2 - V\left(q_1, q_2, \cdots, q_N\right)$$

このとき運動量は $p_a = \delta L/\delta \dot{q}_a$ となり

$$[p_a(t), q_a(t)] = -i\delta_{ab} = \begin{cases} -i(a = b) \\ \ \ 0(a \neq b) \end{cases}$$

の交換関係を満たす.

場の理論の一般化についてもほとんどただちに行われる. 実際これまで扱ってきたラグランジアン L を一般に D 次元では以下のように書ける.

$$L = \int d^D x \left\{\frac{1}{2}\left(\dot{\varphi}^2 - (\vec{\nabla}\varphi)^2 - m^2\varphi^2\right) - u(\varphi)\right\}$$

ただし $u(\varphi)$ は非調和項でこれまでの $u(\varphi) = \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 + \frac{\tau}{6!}\varphi^6 + \cdots$ である. ここでのラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ は適当な変形にてこれまで通り

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \left\{\frac{1}{2}\left(\dot{\varphi}^2 - (\vec{\nabla}\varphi)^2 - m^2\varphi^2\right) - u(\varphi)\right\} \\
&\to -\frac{1}{2}\varphi\left(\partial^2 + m^2\right)\varphi - u(\varphi)
\end{aligned}$$

の様に書けることにも注意する (ただし D 次元).

計算

簡単に $D=1$ として以下を示す.

$$\mathcal{L}=\left\{\frac{1}{2}\left(\dot{\varphi}^2-(\vec{\nabla}\varphi)^2-m^2\varphi^2\right)-u(\varphi)\right\}$$
$$\to -\frac{1}{2}\varphi\left(\partial^2+m^2\right)\varphi-u(\varphi)$$

(解答) $D=1$ のときラグランジアン密度は

$$\mathcal{L}=\left[\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2-m^2\varphi^2\right\}-u(\varphi)\right]$$

ここで

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2+\varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$$

であるから変形して $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2,\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2$ を上を代入する. そのラグランジアン密度を積分して、部分積分の項を落とせば

$$\mathcal{L}\to\left[\frac{1}{2}\left\{-\varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+\varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-m^2\varphi^2\right\}-u(\varphi)\right]$$

となる. これを整理して

$$=-\frac{1}{2}\varphi\left(\partial^2+m^2\right)\varphi-u(\varphi)$$

以上にて示された.(解答終)
****

ハミルトニアン密度も、解析力学で学んだ $H=\sum_i p_i\dot{q}_i-L$ であることから簡単に想像できるように

$$\mathcal{H}=\pi(x)\dot{\varphi}(x)-\mathcal{L}$$

と表される (π が運動量、φ が位置の役割となっている.). ハミルトニアン密度を積分したらハミルトニアンになるのであるから

$$H=\int d^Dx[\pi(\vec{x},t)\dot{\varphi}(\vec{x},t)-\mathcal{L}]$$

文献によれば

$$=\int d^Dx\left\{\frac{1}{2}\left[\pi^2+(\vec{\nabla}\varphi)^2+m^2\varphi^2\right]+u(\varphi)\right\}$$

と変形される. これは変分原理によって簡単に示される.

計算

以下を示せ.

$$H=\int d^Dx[\pi(\vec{x},t)\dot{\varphi}(\vec{x},t)-\mathcal{L}]$$
$$=\int d^Dx\left\{\frac{1}{2}\left[\pi^2+(\vec{\nabla}\varphi)^2+m^2\varphi^2\right]+u(\varphi)\right\}$$

(解答) ラグランジアン密度は

$$\mathcal{L}=\left\{\frac{1}{2}\left(\dot{\varphi}^2-(\vec{\nabla}\varphi)^2-m^2\varphi^2\right)-u(\varphi)\right\}$$

であった. これよりハミルトニアンは

$$
\begin{aligned}
H &= \int d^D x \left[\pi(\vec{x},t)\partial_0\varphi(\vec{x},t) - \mathcal{L}\right] \\
&= \int d^D x \left[\pi(\vec{x},t)\dot{\varphi} - \frac{1}{2}\left\{\dot{\varphi}^2 - (\vec{\nabla}\varphi)^2 - m^2\varphi^2\right\} + u(\varphi)\right]
\end{aligned}
$$

と書ける. ここで

$$
\frac{\partial}{\partial t}\left[\pi\varphi - \frac{1}{2}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right] = \dot{\pi}\varphi + \pi\dot{\varphi} - \frac{1}{2}(\dot{\varphi})^2 - \frac{1}{2}\varphi\ddot{\varphi}
$$

を用いて

$$
\pi\dot{\varphi} - \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 = -\frac{\dot{\pi}}{2}\varphi + \frac{\partial}{\partial t}\left[\pi\varphi - \frac{1}{2}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]
$$

と変形され、これを代入したあとに部分積分の項を落として、

$$
H = \int d^D x \left[-\frac{\dot{\pi}}{2}\varphi + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\varphi)^2 + \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + u(\varphi)\right]
$$

とハミルトニアンを書き直すことができる. さらに

$$
\dot{\pi}\varphi = \frac{\partial}{\partial t}(\pi\varphi) - \pi^2
$$

を代入して部分積分の項を落として

$$
H = \int d^D x \left\{\frac{1}{2}\left[\pi^2 + (\vec{\nabla}\varphi)^2 + m^2\varphi^2\right] + u(\varphi)\right\}
$$

以上にて示された.(解答終)
****

これより正準共役運動量密度は $\pi(\vec{x},t)$ は $p = dL/dt$ であったように

$$
\pi(\vec{x},t) = \frac{\delta L}{\delta\dot{\varphi}(\vec{x},t)} = \dot{\varphi} \quad (= \partial_0\varphi)\,.
$$

そして交換関係式 $[p,q] = -i$ であった様に、

$$
[\pi(\vec{x},t), \varphi(\vec{x}',t)] = [\partial_0\varphi(\vec{x},t), \varphi(\vec{x}',t)] = -i\delta^{(D)}(\vec{x} - \vec{x}')
$$

を満たす.

文献記載がある様に $u = 0$ とすることにより (つまりインタラクションがないとして)、最小作用の原理を用いれば例のクラインゴルドン方程式

$$
\left(\partial^2 + m^2\right)\varphi = 0
$$

が導かれる. さらにこの状況でフーリエ変換をすることにて

$$
\boxed{\varphi(\vec{x},t) = \int \frac{d^D k}{\sqrt{(2\pi)^D 2\omega_k}}\left[a(\vec{k})e^{-i\left(\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{x}\right)} + a^\dagger(\vec{k})e^{i\left(\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{x}\right)}\right]}
$$

が導かれると記載がある. ただし $\omega_k = +\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$. 今からこの事実を示したい.

計算

$$\left(\partial^2+m^2\right)\varphi=0$$

から φ のフーリエ変換を用いて

$$\varphi(\vec{x},t)=\int\frac{d^Dk}{\sqrt{(2\pi)^D 2\omega_k}}\left[a(\vec{k})e^{-i\left(\omega_k t-\vec{k}\cdot\vec{x}\right)}+a^\dagger(\vec{k})e^{i\left(\omega_k t-\vec{k}\cdot\vec{x}\right)}\right]$$

と書けることを示せ.

(解答)φ のフーリエ逆変換を

$$\varphi(\vec{x},t):=\int\frac{d^{(D+1)}k}{\sqrt{(2\pi)^{D+1}}}\varphi\left(\vec{k},k^0\right)e^{-ikx}$$

とする.(当然であるが $e^{-ikx}=e^{-ik^0t+i\vec{k}\vec{x}}$) これをクラインゴルドン方程式へ代入して

$$(LHS)=\int\frac{d^{(D+1)}k}{\sqrt{(2\pi)^{D+1}}}\left(-k^2+m^2\right)\varphi\left(\vec{k},k^0\right)e^{-ikx}$$

この左辺が、右辺の 0 を恒等的に満たすためには $-k^2+m^2=0$ であればよい. つまり

$$k^0=\pm\omega$$

であればよい. これより φ は次の 2 次元の一次結合で記述される.

$$\varphi(k)=A(\vec{k})\delta\left(k^0-\omega\right)+B(\vec{k})\delta\left(k^0+\omega\right)$$

デルタ関数は $k^0=\pm\omega_k$ 以外の状況を除外する役割を持つ. これを元の φ のフーリエ逆変換の式へ代入し、さらに k^0 で積分することにて

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=\int\frac{d^{(D+1)}k}{\sqrt{(2\pi)^{D+1}}}\left[A(\vec{k})\delta\left(k^0-\omega\right)+B(\vec{k})\delta\left(k^0+\omega\right)\right]e^{-ikx}\\&=\int\frac{d^Dk}{\sqrt{(2\pi)^{D+1}}}\left[A(\vec{k})e^{-i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x})}+B(\vec{k})e^{-i(-\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x})}\right]\end{aligned}$$

となる. 今 A,B は適当な $\vec{k}$ の関数であるから、辻褄合わせのために以下の様にしておく.

$$A(\vec{k})=\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\omega}}a(\vec{k}),\quad B(\vec{k})=\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\omega}}b^\dagger(-\vec{k})$$

これを上に代入して

$$=\int\frac{d^Dk}{\sqrt{(2\pi)^D}}\frac{1}{\sqrt{2\omega}}\left[a(\vec{k})e^{-i\omega t+i\vec{k}\cdot\vec{x}}+b^\dagger(-\vec{k})e^{i\omega t+i\vec{k}\vec{x}}\right]$$

第二項に対して $\vec{k}\to-\vec{k}$ として

$$\varphi(x)=\int\frac{d^Dk}{\sqrt{(2\pi)^D}}\frac{1}{\sqrt{2\omega}}\left[a(\vec{k})e^{-i\omega t+i\vec{k}\vec{x}}+b^\dagger(\vec{k})e^{i\omega t-i\vec{k}\vec{x}}\right]$$

ここで、エルミート演算子の要請より

$$\varphi(x)=\varphi(x)^\dagger$$

とならなければいけない. 計算するとすぐに $a=b$ となることがわかる. よって

$$\varphi(x)=\int\frac{d^Dk}{\sqrt{(2\pi)^D}\sqrt{2\omega}}\left[a(\vec{k})e^{-i\omega t+i\vec{k}\vec{x}}+a^\dagger(\vec{k})e^{i\omega t-i\vec{k}\vec{x}}\right]$$

次に $a,a^\dagger$ が生成消滅演算子の性質を満たすことを示さなければならない. つまり

$$\begin{aligned}&\left[a(\vec{k}),a^\dagger(\vec{k'})\right]=\delta^{(D)}\left(\vec{k}-\overrightarrow{k'}\right)\\&[a(\vec{k}),a(\vec{k'})]=0\end{aligned}$$

これを正準交換関係式

$$\left[\varphi(t,\vec{x}),\pi\left(t,\overrightarrow{x'}\right)\right]=i\delta^{(D)}\left(\vec{x}-\overrightarrow{x'}\right)$$

にて示す.

正準運動量密度 π は定義より

$$\pi(\vec{x},t)\equiv\frac{d}{dt}\varphi(\vec{x},t)=i\int\frac{d^Dk}{\rho(k)}\omega\left[-a(\vec{k})e^{-i\omega t+i\vec{k}\vec{x}}+a^\dagger(\vec{k})e^{i\omega t-i\vec{k}\vec{x}}\right]$$

である. ただし $\rho(\vec{k})\equiv\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^D2\omega_k}}$ としている. 交換積を計算して

$$\begin{aligned}[\varphi(t,\vec{x}),\pi(t,\vec{x'})]=i\int\frac{d^Dkd^Dk'}{\rho(k)\rho\left(k'\right)}\omega'\Bigg[&-\left\{a(\vec{k})a\left(\overrightarrow{k'}\right)-a\left(\overrightarrow{k'}\right)a(\vec{k})\right\}e^{-it\left(\omega+\omega'\right)+i\left(\vec{k}\cdot\vec{x}+\vec{k'}\cdot\overrightarrow{x'}\right)}\\&+\left\{a(\vec{k})a^\dagger\left(\overrightarrow{k'}\right)-a^\dagger\left(\overrightarrow{k'}\right)a(\vec{k})\right\}e^{-it\left(\omega-\omega'\right)+i\left(\vec{k}\cdot\vec{x}-\overrightarrow{k'}\cdot\overrightarrow{x'}\right)}\\&-\left\{a^\dagger(\vec{k})a\left(\overrightarrow{k'}\right)-a\left(\overrightarrow{k'}\right)a^\dagger(\vec{k})\right\}e^{it\left(\omega-\omega'\right)+i\left(\vec{k}\cdot\vec{x}+\overrightarrow{k'}\cdot\overrightarrow{x'}\right)}\\&+\left\{a^\dagger(\vec{k})a^\dagger\left(\overrightarrow{k'}\right)-a^\dagger\left(\overrightarrow{k'}\right)a^\dagger(\vec{k})\right\}e^{it\left(\omega+\omega'\right)-i\left(\vec{k}\cdot\vec{x}+\overrightarrow{k'}\cdot\overrightarrow{x'}\right)}\Bigg]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}=i\int\frac{d^Dkd^Dk'}{\rho(k)\rho(k')}\omega'\Bigg[&-[a(\vec{k}),a(\vec{k'})]e^{-it(\omega+\omega')+i\left(\vec{k}\cdot\vec{x}+\vec{k'}\cdot\overrightarrow{x'}\right)}\\&+\left[a(\vec{k}),a^\dagger(\vec{k'})\right]e^{-it(\omega-\omega')+i\left(\vec{k}\cdot\vec{x}-\vec{k'}\cdot\overrightarrow{x'}\right)}\\&-\left[a^\dagger(\vec{k}),a(\vec{k'})\right]e^{it(\omega-\omega')+i(\vec{k}\cdot\vec{x}+\vec{k'}\cdot\vec{x'})}\\&+\left[a^\dagger(\vec{k}),a^\dagger(\vec{k'})\right]e^{it(\omega+\omega')-i(\vec{k}\cdot\vec{x}+\vec{k'}\cdot\vec{x'})}\Bigg]\end{aligned}$$

ただし $\omega=\overrightarrow{k^2}+m^2,\quad\omega'=\overrightarrow{k'^2}+m^2$ としている. これが交換関係式を満たす、つまりデルタ関数 $i\delta^{(D)}(\vec{x}-\vec{x'})$ となるためには、

$$\begin{aligned}&\left[a\overrightarrow{(k)},a^\dagger\left(k'\right)\right]=\delta^{(D)}\left(k-\overrightarrow{k'}\right)\\&\left[a\overrightarrow{(k)},a\overrightarrow{(k')}\right]=0\end{aligned}$$

出なければならないことが見てわかる. 実際これを満たしているならば $[\varphi(t,\vec{x}),\pi(t,\vec{x}')]$ の各項は

$$
\begin{aligned}
(\text{第 1 項}) &= 0 \\
(\text{第 2 項}) &= i\int \frac{d^D k}{\rho(k)}\frac{d^D k'}{\rho(k')}\omega' \delta\left(\vec{k}-\overrightarrow{k'}\right) e^{-it\left(\omega-\omega'\right)+i\left(\vec{k}\cdot\vec{x}-\vec{k}'\cdot\vec{x}'\right)} \\
&= \frac{i}{2}\delta^{(D)}\left(\vec{x}-\overrightarrow{x'}\right) \\
(\text{第 3 項}) &= \frac{i}{2}\delta^{(D)}\left(\vec{x}-\overrightarrow{x'}\right) \\
(\text{第 4 項}) &= 0
\end{aligned}
$$

と計算され、

$$
\left[\varphi(t,x),\pi\left(t,\overrightarrow{x'}\right)\right] = i\delta^{(D)}\left(\vec{x}-\overrightarrow{x'}\right)
$$

が満たされる. 以上より、問題は示された.(解答終)
****
量子力学ですでに学んだ様に状態は生成消滅演算子を用いて

$$
\begin{aligned}
a(\vec{k})|0\rangle &= 0 \\
|\vec{k}\rangle &\equiv a^\dagger(\vec{k})|0\rangle
\end{aligned}
$$

と表されるのであった. 例えばこれらと $\left[a(\overrightarrow{k}),a^\dagger\left(\overrightarrow{k'}\right)\right] = \delta^{(D)}\left(\overrightarrow{k}-\overrightarrow{k'}\right)$ を用いて

$$
\langle 0|\varphi(\vec{x},t)|\vec{k}\rangle = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^D 2\omega_k}} e^{-i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x})}.
$$

であることなどが言える.

計算

以下を示せ.

$$
\langle 0|\varphi(\vec{x},t)|\vec{k}\rangle = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^D 2\omega_k}} e^{-i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x})}.
$$

(解答)
まず生成消滅演算子の性質より

$$
\langle 0|\varphi(\overrightarrow{x},t)|\vec{k}\rangle = \left\langle 0\left|\varphi(\overrightarrow{x},t)a^\dagger(\vec{k})\right|0\right\rangle
$$

と書き直される. 一方でこのブラケットの中身は

$$
\begin{aligned}
\varphi(\vec{x},t)a^\dagger(\vec{k}) &= \int \frac{d^D k'}{\sqrt{(2\pi)^D 2\omega'}}\left[a(\vec{k'})\cdot e^{-i\left(\omega' t-\vec{k'}\vec{x}\right)} + a^\dagger\left(\overrightarrow{k'}\right)e^{i\left(\omega' t-\vec{k'}\cdot\vec{x}\right)}\right]a^\dagger(\vec{k}) \\
&= \int \frac{d^D k'}{\sqrt{(2\pi)^D 2\omega'}} a(\vec{k'})a^\dagger(\vec{k})e^{-i(\omega' t-\vec{k'}\cdot\vec{x})} + (\mathrm{rest})
\end{aligned}
$$

(rest) の項はブラケットで挟む際に 0 となるので略記した. ここで交換関係式

$$
a(\vec{k})a^\dagger\left(\overrightarrow{k'}\right) - a^\dagger\left(\overrightarrow{k'}\right)a(\vec{k}) = \delta^{(D)}\left(\vec{k}-\overrightarrow{k'}\right)
$$

を変形して代入し

$$
= \int \frac{d^D k'}{\sqrt{(2\pi)^D 2\omega'}}\left[\delta^{(D)}\left(\vec{k}-\overrightarrow{k'}\right) + a^\dagger(\vec{k'})a(\vec{k})\right]e^{-i\left(\omega' t-\vec{k'}\cdot\vec{x}\right)} + (\mathrm{rest})
$$

両辺 $\langle 0|, |0\rangle$ で挟み込み第二項と (rest) が消える．さらに k' の積分を実行することにて、問題の式となる.(解答終)
****
また以下も示される.

計算

以下を示せ.

$$\langle 0|\varphi(\vec{x},t)\varphi(\overrightarrow{0},0)|0\rangle = \int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D 2\omega} e^{-i(\omega t-\vec{k}\vec{x})}$$

(解答)
これまでと同様に $\varphi(\vec{x},t), \varphi(\vec{0},0)$ はそれぞれ

$$\varphi(\vec{x},t) = \int \frac{d^0k}{\sqrt{(2\pi)^0 2\omega}} \left[a(\vec{k})e^{-i(\omega t-\vec{k}\vec{x})} + a^\dagger(\vec{k})e^{i(\omega t-\vec{k}\vec{x})}\right]$$
$$\varphi(\overrightarrow{0},0) = \int \frac{d^Dk'}{\sqrt{(2\pi)^p 2\omega'}} \left(a\left(\overrightarrow{k'}\right) + a^\dagger\left(\overrightarrow{k'}\right)\right)$$

と書くことができる. よってブラケットの中身は、上の二つの積であるが

$$\left\langle 0 \left| a^\dagger(\vec{k}) = a(\vec{k}) \right| 0 \right\rangle = 0$$

であることより、ブラケットで挟み込んだ際に $a(\vec{k})a^\dagger(\vec{k'})$ の項以外は全て 0 になる．よって

$$\langle 0|\varphi(\vec{x},t)\varphi(\overrightarrow{0},0)|0\rangle = \int \frac{d^Dkd^Dk'}{(2\pi)^D\sqrt{4\omega\omega'}} \langle k \mid k'\rangle e^{-i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x})}$$

ただし $\left\langle 0 \left| a(\vec{k}) = a^\dagger(\vec{k}) \right| 0 \right\rangle = |\vec{k}\rangle$ であることをもちいた. ここで

$$\langle k \mid k'\rangle = \delta^{(D)}(\vec{k}-\vec{k'})$$

であるから、k' で積分して

$$\langle 0|\varphi(\vec{x},t)\varphi(\overrightarrow{0},0)|0\rangle = \int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D 2\omega} e^{-i(\omega t-\vec{k}\vec{x})}$$

以上にて示された.(解答終)
****

2 T 積

今、T 積と呼ばれるものを以下に定義する.

$$T[\varphi(x)\varphi(y)] \equiv \theta\left(x^0-y^0\right)\varphi(x)\varphi(y) + \theta\left(y^0-x^0\right)\varphi(y)\varphi(x)$$

このとき以下を満たす.

$$\langle 0|T[\varphi(\vec{x},t)\varphi(\overrightarrow{0},0)]|0\rangle = \int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D 2\omega}\left[\theta(t)e^{-i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x})} + \theta(-t)e^{i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x})}\right]$$

計算

上を示せ

(解答)

単純計算によって示される. 一般の $\varphi(x)\varphi(y)$ に対して $\langle 0|T[\varphi(x)\varphi(y)]|0\rangle$ は

$$
\begin{aligned}
&\langle 0|T[\varphi(x)\varphi(y)]|0\rangle \\
&=\langle 0|\theta\left(x^0-y^0\right)\varphi(x)\varphi(y)+\theta\left(y^0-x^0\right)\varphi(y)\varphi(x)|0\rangle \\
&=\left\langle 0\left|\theta\left(x^0-y^0\right)\varphi(x)\varphi(y)\right|0\right\rangle+\left\langle 0\left|\theta\left(y^0-x^0\right)\varphi(y)\varphi(x)\right|0\right\rangle .
\end{aligned}
$$

であるが、ここで $\varphi(x)\varphi(y)$ は

$$
\begin{aligned}
\varphi(x)\varphi(y)=\int \frac{d^D k d^D k'}{\rho_k\rho_{k'}}&\left[a(\vec{k})e^{-i\left(\omega x^0-\vec{k}\vec{x}\right)}+a^{\dagger}(\vec{k})e^{i\left(\omega x^0-\vec{k}\cdot\vec{x}\right)}\right] \\
&\left[a\left(\overrightarrow{k'}\right)e^{-i\left(\omega' y^0-\overrightarrow{k'}\cdot\overrightarrow{y'}\right)}+a^{\dagger}\left(\overrightarrow{k'}\right)e^{i\left(\omega' y^0-\overrightarrow{k'}\cdot\vec{y}\right)}\right]
\end{aligned}
$$

であり、ブラケットで挟み込む際に前回と同様 $aa^{\dagger}$ の項のみが生き残るので

$$
\left\langle 0\left|\theta\left(x^0-y^0\right)\varphi(x)\varphi(y)\right|0\right\rangle=\int \frac{d^D k d^D k'}{\rho_k\rho_{k'}}\theta\left(x^0-y^0\right)\delta^{(D)}(\vec{k}-\vec{k'})e^{-i(\omega x^0-\vec{k}\cdot\vec{x})+i\left(\omega' y^0-\vec{k}\cdot\overrightarrow{y'}\right)}
$$

k' で積分して

$$
=\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D 2\omega}\theta\left(x^0-y^0\right)e^{-i\left(\omega x^0-\vec{k}\cdot\vec{x}\right)+i\left(\omega y^0-\vec{k}\cdot\vec{y}\right)}
$$

となる. ここで $y^0=0,\vec{y}=\vec{0}$ とすれば

$$
\langle 0|\theta(t)\varphi(\vec{x},t)\varphi(\overrightarrow{0},0)|0\rangle=\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D 2\omega}\theta(t)e^{-i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x})}
$$

同様に $\left\langle 0\left|\theta\left(y^0-x^0\right)\varphi(y)\varphi(x)\right|0\right\rangle$ の項も計算して

$$
\langle 0|T[\varphi(\vec{x},t)\varphi(\overrightarrow{0},0)]|0\rangle=\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D 2\omega}\left[\theta(t)e^{-i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x})}+\theta(-t)e^{i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x})}\right]
$$

を得る.(解答終)
****
実は以前導出した 1 粒子の 0 から x までのプロパゲーター $D(x)$ を見比べてみると以下が成立している.

$$
\langle 0|T[\varphi(\vec{x},t)\varphi(\overrightarrow{0},0)]|0\rangle=iD(x)
$$

以上より生成消滅演算子を介して、T 積は経路積分と同等であることを確かめることができた. なお一般に

$$
\left\langle 0\left|T\left[\varphi\left(\vec{x},x^0\right)\varphi\left(\vec{y},y^0\right)\right]\right|0\right\rangle=iD(x-y)
$$

であることも容易に示される.

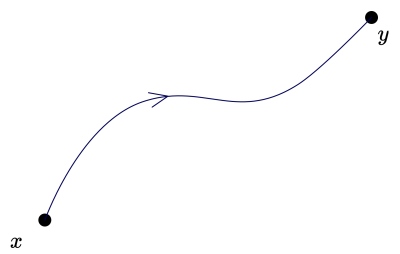

Figure 1:

3　測度 $d^{(D)}k/(2\omega)$ について

この測度はローレンツ不変でない様に見えるが、実際ローレンツ不変であることを以下の式から確かめられると、文献に記載がある.

$$\int d^{(D+1)}k\delta\left(k^2-m^2\right)\theta\left(k^0\right)f\left(k^0,\vec{k}\right)=\int\frac{d^Dk}{2\omega_k}f\left(\omega_k,\vec{k}\right)$$

今から、これを示す.

計算

$$\int d^{(D+1)}k\delta\left(k^2-m^2\right)\theta\left(k^0\right)f\left(k^0,\vec{k}\right)=\int\frac{d^Dk}{2\omega_k}f\left(\omega_k,\vec{k}\right)$$

を示せ.

(解答)
これを示すためにデルタ関数の以下の形を用いる.

$$\delta(x)=\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}$$

実際これは $x\in\mathbb{R}\mapsto z\in\mathbb{C}$ へと解析接続をして、留数定理を用いることにて $x\in(-\infty,\infty)$ の積分が 1 となることが容易に確かめられる. この形を実直に用いて

$$\begin{aligned}&\int d^{(D+1)}k\delta\left(k^2-m^2\right)\theta\left(k^0\right)f\left(k^0,\vec{k}\right)\\&=\int d^{(D+1)}k\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{\left(k^2-m^2\right)^2+\varepsilon^2}\theta\left(k^0\right)f\left(k^0,\vec{k}\right)\end{aligned}$$

ここで $k^2-m^2=(k^0)^2-\omega^2$ として $k^0\mapsto z\in\mathbb{C}$ へと解析接続を行う.

$$=\int d^{(D)}k\int dz\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{\left(z^2-\omega^2\right)^2+\varepsilon^2}\theta\left(z\right)f\left(z,\vec{k}\right)$$

分母は因数分解して

$$\begin{aligned}&=\int d^Dk\int dz\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{\left(z^2-\omega^2+i\varepsilon\right)\left(z^2-\omega^2-i\varepsilon\right)}\theta(z)f(z,\vec{k})\\&=\int d^Dk\int dz\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon\theta(z)f(z,\vec{k})}{\left(z+\sqrt{\omega^2-i\varepsilon}\right)\left(z-\sqrt{\omega^2-i\varepsilon}\right)\left(z+\sqrt{\omega^2+i\varepsilon}\right)\left(z-\sqrt{\omega^2+i\varepsilon}\right)}\end{aligned}$$

今 ε が十分小さい状況であるから、以下の Tyalor 展開

$$\begin{aligned}\sqrt{1-y}&\sim1-\frac{y}{2}\\\sqrt{1+y}&\sim1+\frac{y}{2}\end{aligned}$$

によって上の被積分関数の極は

$$\begin{aligned}z+\sqrt{\omega^2-i\varepsilon}&\sim z+\omega-\frac{i\varepsilon}{2\omega}\\z-\sqrt{\omega^2-i\varepsilon}&\sim z-\omega+\frac{i\varepsilon}{2\omega}\\z+\sqrt{\omega^2+i\varepsilon}&\sim z+\omega+\frac{i\varepsilon}{2\omega}\\z-\sqrt{\omega^2+i\varepsilon}&\sim z-\omega-\frac{i\varepsilon}{2\omega}\end{aligned}$$

が 0 なる座標に分布する. つまり上の積分は以下で近似される.

$$\sim \int d^D k \int dz \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon\theta(z) f(z,\vec{k})}{\left(z+\omega-\frac{i\varepsilon}{2\omega}\right)\left(z-\omega+\frac{i\varepsilon}{2\omega}\right)\left(z+\omega+\frac{i\varepsilon}{2\omega}\right)\left(z-\omega-\frac{i\varepsilon}{2\omega}\right)}$$

今被積分関数が以下の路にて $R\to\infty$ で収束するとする. 然らば留数定理にて、z の積分 I は

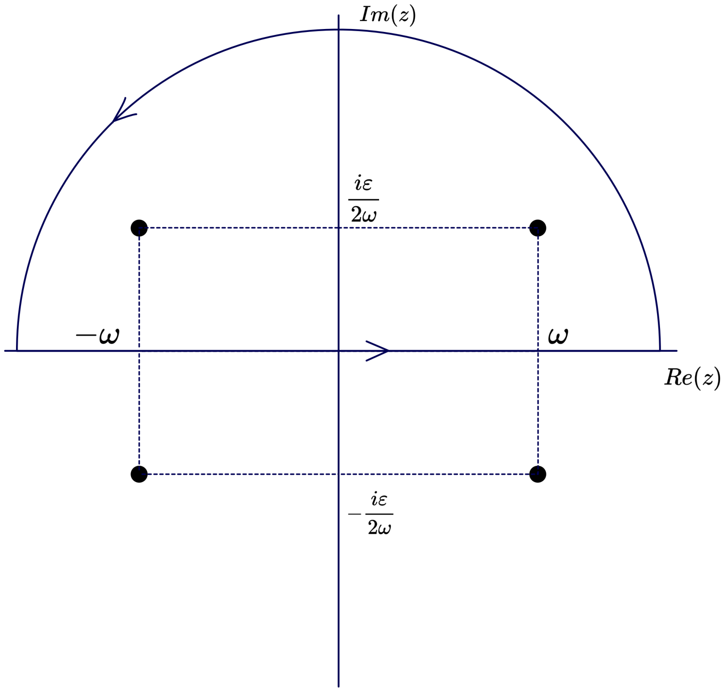

Figure 2:

$$h(z) = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon\theta(z) f(z,\vec{k})}{\left(z+\omega-\frac{i\varepsilon}{2\omega}\right)\left(z-\omega+\frac{i\varepsilon}{2\omega}\right)\left(z+\omega+\frac{i\varepsilon}{2\omega}\right)\left(z-\omega-\frac{i\varepsilon}{2\omega}\right)}$$

として

$$I = 2\pi i \left[\mathrm{Res}\left(z=\omega+\frac{i\varepsilon}{2\omega}, h(z)\right) + \mathrm{Res}\left(z=-\omega+\frac{i\varepsilon}{2\omega}, h(z)\right)\right]$$

計算して

$$= \frac{\theta\left(\omega+\frac{i\varepsilon}{2\omega}\right) f\left(\omega+\frac{i\varepsilon}{2\omega}, \vec{k}\right)}{2\left(\omega+\frac{i\varepsilon}{2\omega}\right)} - \frac{\theta\left(-\omega-\frac{i\varepsilon}{2\omega}\right) f\left(-\omega-\frac{i\varepsilon}{2\omega}, \vec{k}\right)}{2\left(\omega+\frac{i\varepsilon}{2\omega}\right)}$$

今 $\varepsilon\to 0$ とすれば

$$\to \frac{1}{2\omega}\{\theta(\omega)f(\omega,\vec{k}) - \theta(-\omega)f(-\omega,\vec{k})\} \quad (\varepsilon\to 0)$$

ここで $\omega>0$ であり、θ は階段関数で

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & (x>0) \\ 0 & (x<0) \end{cases}$$

であったのだから

$$= \frac{1}{2\omega} f(\omega, \vec{k})$$

となる. 以上にて示された.(解答終)

****
これにてこれまで計算してきた内容が相対論的に矛盾がないこととなる.

4 散乱振幅

簡単のためにラグランジアンを $\mathcal{L}_{\mathrm{int}} = -u(x) = -\frac{\lambda}{4!}\varphi(x)^4$ として $\left\langle \vec{k}_3\vec{k}_4 \left| e^{-iHT} \right| \vec{k}_1\vec{k}_2 \right\rangle$ を展開して以下の図で表される様な散乱振幅を求めたい まず計算していき

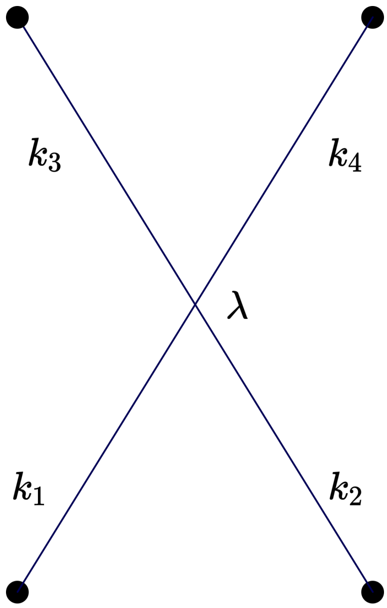

Figure 3:

$$\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{k_3}\overrightarrow{k_4} \left| e^{-iHT} \right| \vec{k}_1\vec{k}_2 \right\rangle &= \left\langle \vec{k}_3\vec{k}_4 \left| e^{i\int d^4x \mathcal{L}_{int}(x)} \right| \vec{k}_1\overrightarrow{k_2} \right\rangle \\
&= \left\langle \vec{k}_3\vec{k}_4 \left| e^{-\frac{\lambda}{4}i\int d^4x \varphi(x)^4} \right| \vec{k}_1\vec{k}_2 \right\rangle \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{\lambda}{4!}i\right)^n \int d^4x_0 \cdots \int d^4x_n \left\langle \overrightarrow{k_3}\vec{k}_4 \left| \varphi(x_0)^4 \varphi(x_1)^4 \ldots \varphi(x_n)^4 \right| \vec{k}_1\vec{k}_2 \right\rangle
\end{aligned}$$

そして λ の一次の項のみを考える. それを I としよう. それは

$$I = -\frac{\lambda}{4!}i \int d^4x \left\langle \overrightarrow{k_3}\vec{k}_4 \left| \varphi(x)^4 \right| \vec{k}_1\vec{k}_2 \right\rangle$$

と上から得られる. ここで場 φ は生成消滅演算子を用いて

$$\varphi(x) = \int \frac{d^D k}{\sqrt{(2\pi)^D 2\omega}} \left[a(\vec{k})e^{-ikx} + a^\dagger(\vec{k})e^{ikx} \right]$$

と書けるのであったから、φ^4 はこれの 4 つの積で書くことができる.

$$
\begin{aligned}
\varphi^4(x) = \int \frac{d^Dk_ad^Dk_bd^Dk_cd^Dk_d}{\rho_a\rho_b\rho_c\rho_d} & \left[a\left(\vec{k_a}\right)e^{-ik_ax} + a^\dagger\left(\vec{k_a}\right)e^{ik_ax}\right] \\
& \left[a\left(\overrightarrow{k_b}\right)e^{-ik_bx} + a^\dagger\left(\overrightarrow{k_b}\right)e^{ik_bx}\right] \\
& \left[a\left(\overrightarrow{k_c}\right)e^{-ik_cx} + a^\dagger\left(\overrightarrow{k_c}\right)e^{ik_cx}\right] \\
& \left[a\left(\overrightarrow{k_d}\right)e^{-ik_dx} + a^\dagger\left(\overrightarrow{k_d}\right)e^{ik_dx}\right]
\end{aligned}
$$

ただし $ikx = i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})$ である. ここで上で展開される合計 $2^4 = 16$ 個の項のうち、$a^\dagger a^\dagger aa$ の項に注目すれば (それ以外の項は以下の計算の過程で消えるのか?)

$$
\begin{aligned}
I &= -\frac{\lambda}{4!}i\int d^4x \left\langle \overrightarrow{k_3}\vec{k}_4 \left|\varphi(x)^4\right| \vec{k}_1\vec{k}_2 \right\rangle \\
&= -\frac{\lambda}{4!}i\int d^4x \left\langle \overrightarrow{k_3}\overrightarrow{k_4} \left| \int \frac{d^Dk_a\cdots d^Dk_d}{\rho_a\cdots\rho_d} a^\dagger\left(\overrightarrow{k_a}\right)a^\dagger\left(\overrightarrow{k_b}\right)a\left(\overrightarrow{k_c}\right)a\left(\overrightarrow{k_d}\right)e^{i(k_a+k_b-k_c-k_d)x} \right| \overrightarrow{k_1}\overrightarrow{k_2} \right\rangle + (\mathrm{rest})
\end{aligned}
$$

を得る. 上に対して x の積分はデルタ関数であるから

$$
\delta^{(D)}(x-y) \equiv \int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D}e^{ik(x-y).}
$$

書き直して

$$
= -\frac{(2\pi)^D\lambda}{4!}i\left\langle \overrightarrow{k_3}\overrightarrow{k_4} \left| \int \frac{d^Dk_a\cdots d^Dk_d}{\rho_a\cdots\rho_d} a^\dagger\left(\overrightarrow{k_a}\right)a^\dagger\left(\overrightarrow{k_b}\right)a\left(\overrightarrow{k_c}\right)a\left(\overrightarrow{k_d}\right)\delta^{(D)}\left(k_a+k_b-k_c-k_d\right) \right| \overrightarrow{k_1}\overrightarrow{k_2} \right\rangle
$$

また

$$
\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{k_3}\overrightarrow{k_4} \right| &= \langle 0| a\left(\overrightarrow{k_3}\right)a\left(\overrightarrow{k_4}\right) \\
\left| \overrightarrow{k_1}\overrightarrow{k_2} \right\rangle &= a^\dagger\left(\overrightarrow{k_1}\right)a^\dagger\left(\overrightarrow{k_2}\right)|0\rangle
\end{aligned}
$$

でもあるから、書き換える.

$$
\begin{aligned}
= -\frac{(2\pi)^D\lambda}{4!}i\int & \frac{d^Dk_a\cdots d^Dk_d}{\rho_a\cdots\rho_d}\delta^{(D)}\left(k_a+k_b-k_c-k_d\right) \\
& \left\langle 0 \left| a\left(\overrightarrow{k_3}\right)a\left(\overrightarrow{k_4}\right)a^\dagger\left(\overrightarrow{k_a}\right)a^\dagger\left(\overrightarrow{k_b}\right)a\left(\overrightarrow{k_c}\right)a\left(\overrightarrow{k_d}\right)a^\dagger\left(\overrightarrow{k_1}\right)a^\dagger\left(\overrightarrow{k_2}\right) \right| 0 \right\rangle
\end{aligned}
$$

今、生成消滅演算子の交換関係式

$$
\begin{aligned}
\left[a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k})\right] &= \delta^{(D)}(\vec{k}-\vec{k}') \\
\left[a(\vec{k}), a\left(\overrightarrow{k'}\right)\right] &= 0
\end{aligned}
$$

を思いだす. これよりブラケットの中身は $a(\vec{k_i}) := a_i, \delta^D(\vec{k_i}-\vec{k_j}) := \delta_{ij}$ として

$$
\begin{aligned}
a_3a_4a_a^\dagger a_b^\dagger a_ca_da_1^\dagger a_2^\dagger &= a_3\left\{\delta_{4a} - a_a^\dagger a_4\right\}a_b^\dagger a_ca_da_1^\dagger a_2^\dagger \\
&= a_3\delta_{4a}a_b^\dagger a_ca_da_1^\dagger a_2^\dagger - a_3a_a^\dagger a_4a_b^\dagger a_ca_da_1^\dagger a_2^\dagger \\
&= \delta_{4a}\left(\delta_{3b} - a_b^\dagger a_3\right)a_ca_da_1^\dagger a_2^\dagger - \left(\delta_{3a} - a_a^\dagger a_3\right)a_4a_b^\dagger a_ca_da_1^\dagger a_2^\dagger \\
&= \delta_{4a}\delta_{3b}a_ca_da^\dagger a_2^\dagger - \delta_3a_4a_b^\dagger a_ca_da_1^\dagger a_2^\dagger + (\mathrm{rest})
\end{aligned}
$$

($a_i^\dagger$ が一番左にきたり、a_j が一番右にきたら, それらはブラケットで挟んだときに消えるので、(rest) でひとくくりにしている．)

$$
\begin{aligned}
&= \delta_{4a}\delta_{3b}a_c\left(\delta_{d1} - a_1^\dagger a_d\right)a_2^\dagger - \delta_{3a}\left(\delta_{4b} - a_b^\dagger a_4\right)a_c a_d a_1^\dagger a_2^\dagger + (\text{rest}) \\
&= \delta_{4a}\delta_{3b}\delta_{d1}\delta_{c2} - \delta_{4a}\delta_{3b}a_c a_1^\dagger a_d a_2^\dagger - \delta_{3a}\delta_{4b}a_c a_d a_1^\dagger a_2^\dagger + \delta_{3a}a_b^\dagger a_4 a_c a_d a_1^\dagger a_2^\dagger + (\text{rest}) \\
&\vdots \\
&= \sum_{\sigma\in S_4}\delta_{(1)\sigma,a}\delta_{(2)\sigma b}\delta_{(3)\sigma c}\delta_{(4)\sigma d}
\end{aligned}
$$

ただし S_4 は 4 次対称群 (位数 $4! = 24$). 任意の組み合わせが現れるので $1/4!$ の係数は相殺される.(もしかしたら $\mathrm{sgn}(\sigma)$ が必要かも??)

このようにしてブラケットの中身は $k_a, ..., k_d$ のデルタ関数となるので、I に代入して $k_a, ..., k_d$ で積分して

$$
I = -i\lambda\frac{(2\pi)^D}{\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4}\delta^{(D)}\left(k_1 + k_2 - k_3 - k_4\right).
$$

となる. これが文献の式 $1-8-(14)$ から式 $1-8-(15)$ までの記載内容である.

5 複素スカラー場

これまで扱ってきた場はエルミート、つまり

$$\varphi = \varphi^\dagger$$

を満たすものであった. いまから扱う場はエルミートでないものである. つまり

$$\varphi \neq \varphi^\dagger$$

ラグランジアン密度を以下で定義する.

$$\mathcal{L} = \partial\varphi^\dagger\partial\varphi - m^2\varphi^\dagger\varphi$$

まずはじめに、これらがクラインゴルドン方程式

$$
\begin{aligned}
\left(\partial^2 + m^2\right)\varphi &= 0 \\
\left(\partial^2 + m^2\right)\varphi^\dagger &= 0
\end{aligned}
$$

を満たすことを示す.

問

$$\mathcal{L} = \partial\varphi^\dagger\partial\varphi - m^2\varphi^\dagger\varphi$$

から

$$
\begin{aligned}
\left(\partial^2 + m^2\right)\varphi &= 0 \\
\left(\partial^2 + m^2\right)\varphi^\dagger &= 0
\end{aligned}
$$

を示せ.

(解答)
変分原理を用いて示す. まず φ の変分 $\varphi \to \varphi + \varepsilon$ として

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &\to \frac{\partial\varphi^\dagger}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}(\varphi+\varepsilon) - \frac{\partial\varphi^\dagger}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}(\varphi+\varepsilon) - m^2\varphi^\dagger(\varphi+\varepsilon) \\
&= \mathcal{L} + \frac{\partial\varphi^\dagger}{\partial t}\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} - m^2\varphi^\dagger\varepsilon
\end{aligned}
$$

ここで

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \varphi^\dagger}{\partial t}\cdot\varepsilon\right) = \frac{\partial^2\varphi^\dagger}{\partial t^2}\cdot\varepsilon + \frac{\partial\varphi^\dagger}{\partial t}\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi^\dagger}{\partial x}\cdot\varepsilon\right) = \frac{\partial^2\varphi^\dagger}{\partial x^2}\cdot\varepsilon + \frac{\partial\varphi^\dagger}{\partial x}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} \end{cases}$$

を用いて部分積分の項を落とし

$$\Rightarrow \mathcal{L} - \frac{\partial^2\varphi^\dagger}{\partial t^2}\cdot\varepsilon + \frac{\partial^2\varphi^\dagger}{\partial x^2}\cdot\varepsilon - m^2\varphi^\dagger\varepsilon$$

ここで $\delta\mathcal{L}=0$ でなければいけないから

$$\left(\partial^2+m^2\right)\varphi^\dagger = 0$$

今度は $\varphi^\dagger$ で変分をとって他方を得る. 以上にて示された.(解答終)
****
また φ のフーリエ変換は、φ が非エルミートであることより、前回の導出と同様に

$$\varphi(\vec{x},t) = \int \frac{d^Dk}{\sqrt{(2\pi)^D 2\omega_k}}\left[a(\vec{k})e^{-i\left(\omega_k t-\vec{k}\cdot\vec{x}\right)} + b^\dagger(\vec{k})e^{i\left(\omega_k t-\vec{k}\cdot\vec{x}\right))}\right]$$

で与えられる.

計算

カレントを以下で定義する.

$$J_\mu \equiv i\left(\varphi^\dagger\partial_\mu\varphi - \partial_\mu\varphi^\dagger\varphi\right)$$

このとき

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

を示せ.

(解答)
定義より計算して

$$\begin{aligned} \partial_\mu J^\mu &= i\partial_\mu\left(\varphi^\dagger\partial^\mu\varphi - \partial^\mu\varphi^\dagger\varphi\right) \\ &= i\left\{\left(\partial_\mu\varphi^\dagger\right)\left(\partial^\mu\varphi\right) + \varphi^\dagger\partial^2\varphi - \left(\partial^2\varphi^\dagger\right)\varphi - \partial^\mu\varphi^\dagger\right)\left(\partial_\mu\varphi\right)\right\} \\ &= i\left\{\varphi^\dagger\partial^2\varphi - \left(\partial^2\varphi^\dagger\right)\varphi\right\} \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} \left(\partial^2+m^2\right)\varphi \quad &= 0 \\ \left(\partial^2+m^2\right)\varphi^\dagger \quad &= 0 \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} \varphi^\dagger\left(\partial^2+m^2\right)\varphi &= 0 \\ \varphi\left(\partial^2+m^2\right)\varphi^\dagger &= 0 \end{aligned}$$

これについて上の式から下の式を引いて

$$\varphi^\dagger\partial^2\varphi - \left(\partial^2\varphi^\dagger\right) = 0$$

以上にて示された.(解答終)
****
またチャージ Q が以下で定義されている.

$$Q = \int d^Dx J_0(x)$$

このとき次を示せ.

計算

$$Q = \int d^D x J_0(x) = \int d^D k \left[a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) - b^\dagger(\vec{k})b(\vec{k})\right].$$

(解答)

J_0 は

$$J_0 = i\left(\varphi^\dagger \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\partial\varphi^\dagger}{\partial t}\varphi\right)$$

である. つまり Q は

$$Q = \int d^D x i\left(\varphi^\dagger \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\partial\varphi^\dagger}{\partial t}\varphi\right)$$

φ はフーリエ変換の式より、

$$\varphi(\vec{x},t) = \int \frac{dk}{\rho_k}\left[a(\vec{k})e^{-ikx} + b^\dagger(\vec{k})e^{ikx}\right]$$

$$\frac{\partial\varphi(\vec{x},t)}{\partial t} = -\int \frac{dk}{\rho_k}(i\omega)\left[a(\vec{k})e^{-ikx} - b^\dagger(\vec{k})e^{ikx}\right]$$

ただし $ikx = i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})$ である. これより

$$\varphi^\dagger \frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\int \frac{dkdk'}{\rho_k\rho_{k'}}(i\omega')\left(a^\dagger(\vec{k})e^{+ikx} + b(\vec{k})e^{-ikx}\right)$$
$$\left(a(\vec{k})e^{-ik'x} - b^\dagger\left(\vec{k'}\right)e^{+ik'x}\right)$$

これより

$$\int d^D x \varphi^\dagger \frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\int \frac{dkdk'}{\rho_k\rho_{k'}} i\omega' \left[\int d^D x a^\dagger(\vec{k})a\left(\vec{k'}\right)e^{i\left(k-k'\right)x} + \cdots - \int d^D x b^\dagger(\vec{k})b^\dagger\left(\vec{k'}\right)e^{-i\left(k-k'\right)x}\right]$$

ここで敢えて第 1 項と第 4 項のみを書いたのは、$\frac{\partial\varphi^\dagger}{\partial t}\varphi$ の計算によってそれらは打ち消されるからである.x の積分をデルタ関数にして

$$= -(2\pi)^D \int \frac{dkdk'}{\rho_k\rho_{k'}} i\omega' \left[a^\dagger(\vec{k})a\left(\vec{k'}\right)\delta^{(D)}(k-k') + \cdots - b^\dagger(\vec{k})b^\dagger(\vec{k})\delta^{(D)}(k-k')\right]$$

そして k' で積分して

$$= -(2\pi)^D \int \frac{dk}{(2\pi)^D 2\omega} i\omega \left[a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) + \cdots - b^\dagger(\vec{k})b^\dagger(\vec{k})\right]$$
$$= -\frac{i}{2}\int dk \left[a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) + \cdots - b^\dagger(\vec{k})b^\dagger(\vec{k})\right]$$

まとめて

$$\int d^D x \varphi^\dagger \frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{i}{2}\int dk \left[a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) + \cdots - b^\dagger(\vec{k})b^\dagger(\vec{k})\right]$$

同様の計算にて

$$\int d^D x \frac{\partial\varphi^\dagger}{\partial t}\varphi = \frac{i}{2}\int dk \left[a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) - \cdots - b^\dagger(\vec{k})b^\dagger(\vec{k})\right]$$

これらより

$$\int d^D x i\left(\varphi^\dagger \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\partial\varphi^\dagger}{\partial t}\varphi\right) = \int d^D k \left[a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) - b^\dagger(\vec{k})b(\vec{k})\right]$$

以上にて示された.(解答終)
****

6 真空エネルギー

自由場における期待値

$$\langle 0|H|0\rangle = \int d^D x \frac{1}{2} \left\langle 0 \left| \pi^2 + (\nabla\varphi)^2 + m^2\varphi^2 \right| 0 \right\rangle$$

を計算したい. まずこれまで計算してきたように

$$\langle 0|\varphi(\vec{x},t)\varphi(\vec{x},t)|0\rangle = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D 2\omega}$$

である. なぜなら

$$\varphi(\vec{x},t)\varphi(\vec{x},t) = \int \frac{d^D k d^D k'}{\rho_k \rho_{k'}} \left[a(\vec{k})a(\vec{k'})e^{-i(k+k')x} + a(\vec{k})a^\dagger(\vec{k'})e^{-i\left(k-k'\right)x} + \cdots + a^\dagger(\vec{k})a^\dagger(\vec{k'})e^{i(k-k')x}\right]$$

であって、真空ブラケットを挟み込み

$$\langle 0|\varphi(\vec{x},t)\varphi(\vec{x},t)|0\rangle = \int \frac{d^D k d^D k'}{\rho_k \rho_{k'}} \delta^{(D)}(\vec{k}-\vec{k})e^{-i\left(k-k'\right)x}$$

k' で積分して

$$= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D 2\omega}$$

となる. これを用いて

$$\begin{aligned}\langle 0|H|0\rangle &= V\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D 2\omega}\frac{1}{2}\left(\omega^2 + \vec{k}^2 + m^2\right) \\ &= V\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D}\frac{1}{2}\hbar\omega\end{aligned}$$

敢えて $\hbar$ をあらわに書いたのは、調和振動子のエネルギーを示すためである.

7 Notes

生成消滅演算子の交換関係式から以下は容易に示せる.

$$\left\langle 0 \left| a_4 a_3 a_2^\dagger a_1^\dagger \right| 0 \right\rangle = \delta_{23}\delta_{14} - \delta_{24}\delta_{13}$$

References

[1] Quantum Field Theory in a Nutshell(A.Zee)