Wyel Group $W(F_4)$

Misaki Ohta,University of the Ryukyus *

September 8, 2022

1　四元数による Weyl Group $W(F_4)$ に関して

ワイル群 $W(F_4)$ は Dual な四元数環 $\mathscr{H}^2$ を用いて

$$e_1 = \frac{1}{2}(1 + iq + jr - kp)$$
$$e_2 = \frac{1}{2}(1 - ip - jq - kr)$$
$$e_3 = \frac{1}{2}(1 - ip - jr + kq)$$
$$e_4 = \frac{1}{2}(1 - iq - jp + kr)$$

で生成される乗法群のであった. ただし

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$
$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j$$
$$p^2 = q^2 = r^2 = pqr = -1$$
$$pq = -qp = r, \quad qr = -rq = p, \quad rp = -pr = q$$

を満たす. 前回の論文で確かめたように上の生成元は

$$W(F_4) = < a, b, c, d \mid a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = (ab)^3 = [a, c] = [a, d] = (bc)^4 = [b, d] = (cd)^3 = 1 >$$

を実際に満たす. 今回はこの Weyl 群 $W(F_4)$ の構造に具体的に詳しく調べていきたい. 前回の付録に記載した以下の元からなる四元数によって作られる $2 \cdot A_4$ と同型の位数 24 の群をリストとして載せておく.

$$\begin{array}{lll}
\pm i & & \\
\pm j & & \\
\pm k & & \\
\pm\omega & = \pm\frac{1}{2}(1 + i + j + k) & = \mp\omega^4 \\
\pm\omega^2 & = \pm\frac{1}{2}(-1 + i + j + k) & = \mp\omega^5 \\
\pm\omega^3 & = \pm 1 & \\
\pm i\omega & = \pm\frac{1}{2}(-1 + i - j + k) & = \pm\omega k \\
\pm j\omega & = \pm\frac{1}{2}(-1 + i + j - k) & = \pm\omega i \\
\pm k\omega & = \pm\frac{1}{2}(-1 - i + j + k) & = \pm\omega j \\
\pm i\omega^2 & = \pm\frac{1}{2}(-1 - i - j + k) & = \pm\omega^2 j \\
\pm j\omega^2 & = \pm\frac{1}{2}(-1 + i - j - k) & = \pm\omega^2 k \\
\pm k\omega^2 & = \pm\frac{1}{2}(-1 - i + j - k) & = \pm\omega^2 i
\end{array}$$

実際調べたところによると $W(F_4)$ はこの群を部分群にもち、加えて言うなれば $\langle p, q, r, \frac{1+p+q+r}{2} \rangle$ で

*Department of physics, Email: e193225@eve.u-ryukyu.ac.jp or apple.designed@icloud.com

生成される上と同型の群も部分群にもつ. 今簡単のため

$$\Omega := \frac{1+p+q+r}{2}$$

とすると、上と同様の構造である

$$\begin{array}{lll}
\pm p & & \\
\pm q & & \\
\pm r & & \\
\pm\Omega & = \pm\frac{1}{2}(1+p+q+r) & = \mp\Omega^4 \\
\pm\Omega^2 & = \pm\frac{1}{2}(-1+p+q+r) & = \mp\Omega^5 \\
\pm\Omega^3 & = \pm 1 & \\
\pm p\Omega & = \pm\frac{1}{2}(-1+p-q+r) & = \pm\Omega r \\
\pm q\Omega & = \pm\frac{1}{2}(-1+p+q-r) & = \pm\Omega p \\
\pm r\Omega & = \pm\frac{1}{2}(-1-p+q+r) & = \pm\Omega q \\
\pm p\Omega^2 & = \pm\frac{1}{2}(-1-p-q+r) & = \pm\Omega^2 q \\
\pm q\Omega^2 & = \pm\frac{1}{2}(-1+p-q-r) & = \pm\Omega^2 r \\
\pm r\Omega^2 & = \pm\frac{1}{2}(-1-p+q-r) & = \pm\Omega^2 p
\end{array}$$

も部分群として含む. 交代群 A_4 の性質として、以下の式を上の部分群は常に満たすことも計算上有用である.

$$\begin{array}{lll}
i\omega = \omega k & j\omega = \omega i & k\omega = \omega j \\
i\omega^2 = \omega^2 j & j\omega^2 = \omega^2 k & k\omega^2 = \omega^2 i
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
p\Omega = \Omega r & q\Omega = \Omega p & r\Omega = \Omega q \\
p\Omega^2 = \Omega^2 q & q\Omega^2 = \Omega^2 r & r\Omega^2 = \Omega^2 p
\end{array}$$

今手始めに以下の部分群を調べる.

1.1 部分群 $2 \cdot A_4^2$

問

以下で生成される群 G は位数 288

$$G := \langle e_1e_2, e_3e_4 \rangle$$

は

$$G \cong 2 \cdot (A_4 \times A_4)$$

であることを示せ.

(考察)
e_1e_2, e_3e_4 はそれぞれ

$$e_1e_2 := \tau_1 = \frac{1}{4}(1+i-j+k)(1-p+q-r)$$
$$e_3e_4 := \tau_2 = \frac{1}{4}(1+i+j-k)(1-p-q-r)$$

である. 上に用いた定義に従い書き換え

$$\tau_1 = \left(k\omega^2\right)(p\Omega)$$
$$\tau_2 = \left(i\omega^2\right)\left(\Omega^2\right)$$

上の恒等式を使っていくつか計算した結果を以下に示す.

$$
\begin{aligned}
\tau_1\tau_2 &= -\omega p \\
\tau_2\tau_1 &= k\omega r \\
\tau_1^2 &= i\omega r\Omega^2 \\
(\tau_1\tau_2)^2 &= -\omega^2 \\
(\tau_2\tau_1)^2 &= -j\omega^2 \\
(\tau_1\tau_2)^3 &= -p \\
(\tau_2\tau_1)^3 &= -ir \\
(\tau_1\tau_2)^3(\tau_2\tau_1)^3 &= -iq \\
\tau_1^2(\tau_1\tau_2)^2 &= ir\Omega^2
\end{aligned}
$$

これよりこの群は以下

$$< i, j, k, \omega > \times < p, q, r, \Omega >$$

であることが実験的にうかがえるし、実際証明も可能である. この群 G の元は $2 \cdot A_4^2$ と同型であり、以下の表の要素からなる.(± 1 の符号は省略している. よって以下の要素からなる群は $2 \cdot A_4^2/\{\pm\}$ である.)

1	i	j	k	ω	$i\omega$	$j\omega$	$k\omega$	ω^2	$i\omega^2$	$j\omega^2$	$k\omega^2$
q	ip	jp	kp	ωp	$i\omega p$	$j\omega p$	$k\omega p$	$\omega^2 p$	$j\omega^2 p$	$j\omega^2 p$	$k\omega^2 p$
q	iq	jq	kq	ωq	$i\omega q$	$j\omega q$	$k\omega q$	$\omega^2 q$	$j\omega^2 q$	$j\omega^2 q$	$k\omega^2 q$
r	ir	jr	kr	ωr	$i\omega r$	$j\omega r$	$k\omega r$	$\omega^2 r$	$j\omega^2 r$	$j\omega^2 r$	$k\omega^2 r$
Ω	$i\Omega$	$j\Omega$	$k\Omega$	$\omega\Omega$	$i\omega\Omega$	$j\omega\Omega$	$k\omega\Omega$	$\omega^2\Omega$	$j\omega^2\Omega$	$j\omega^2\Omega$	$k\omega^2\Omega$
$p\Omega$	$ip\Omega$	$jp\Omega$	$kp\Omega$	$\omega p\Omega$	$i\omega p\Omega$	$j\omega p\Omega$	$k\omega p\Omega$	$\omega^2 p\Omega$	$j\omega^2 p\Omega$	$j\omega^2 p\Omega$	$k\omega^2 p\Omega$
$q\Omega$	$iq\Omega$	$jq\Omega$	$kq\Omega$	$\omega q\Omega$	$i\omega q\Omega$	$j\omega q\Omega$	$k\omega q\Omega$	$\omega^2 q\Omega$	$j\omega^2 q\Omega$	$j\omega^2 q\Omega$	$k\omega^2 q\Omega$
$r\Omega$	$ir\Omega$	$jr\Omega$	$kr\Omega$	$\omega r\Omega$	$i\omega r\Omega$	$j\omega r\Omega$	$k\omega r\Omega$	$\omega^2 r\Omega$	$j\omega^2 r\Omega$	$j\omega^2 r\Omega$	$k\omega^2 r\Omega$
Ω^2	$i\Omega^2$	$j\Omega^2$	$k\Omega^2$	$\omega\Omega^2$	$i\omega\Omega^2$	$j\omega\Omega^2$	$k\omega\Omega^2$	$\omega^2\Omega^2$	$j\omega^2\Omega^2$	$j\omega^2\Omega^2$	$k\omega^2\Omega^2$
$p\Omega^2$	$ip\Omega^2$	$jp\Omega^2$	$kp\Omega^2$	$\omega p\Omega^2$	$i\omega p\Omega^2$	$j\omega p\Omega^2$	$k\omega p\Omega^2$	$\omega^2 p\Omega^2$	$j\omega^2 p\Omega^2$	$j\omega^2 p\Omega^2$	$k\omega^2 p\Omega^2$
$q\Omega^2$	$iq\Omega^2$	$jq\Omega^2$	$kq\Omega^2$	$\omega q\Omega^2$	$i\omega q\Omega^2$	$j\omega q\Omega^2$	$k\omega q\Omega^2$	$\omega^2 q\Omega^2$	$j\omega^2 q\Omega^2$	$j\omega^2 q\Omega^2$	$k\omega^2 q\Omega^2$
$r\Omega^2$	$ir\Omega^2$	$jr\Omega^2$	$kr\Omega^2$	$\omega r\Omega^2$	$i\omega r\Omega^2$	$j\omega r\Omega^2$	$k\omega r\Omega^2$	$\omega^2 r\Omega^2$	$j\omega^2 r\Omega^2$	$j\omega^2 r\Omega^2$	$k\omega^2 r\Omega^2$

(The list of A_4^2)

1.2 剰余群 $W(F_4)/A$

$W(F_4)$ を四元数群で割った剰余類を考える. 類の数は四元数群が位数 8 であるから、指数は $1152/8 = 144$ である. ところでバーンサイドの定理より $a^n b^m$ の群は可解群であるから、$W(F_4)$ も可解群である. よって $< i, j >$ は正規部分群であるから、剰余類は群をなす. 上のリストとそのリスト全体にマイナスの符号をつけたものは、この剰余類のうちの二つであることが簡単な計算によってわかる.

1.3 Notes

$$
\begin{aligned}
e_1e_3 &= \frac{1}{2}(i+k)(-p+q) \\
e_2e_4 &= -\frac{1}{2}(i+j)(p+q)
\end{aligned}
$$

and

$$(e_1e_3)^2 = -1$$

1.4 表現

$$\boldsymbol{i} := (i)\rho = \begin{pmatrix} & 1 & & \\ -1 & & & \\ & & & 1 \\ & & -1 & \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{j} := (j)\rho = \begin{pmatrix} & & 1 & \\ & & & -1 \\ -1 & & & \\ & 1 & & \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{k} := (k)\rho = \begin{pmatrix} & & & -1 \\ & & -1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{p} = (p)\rho = \begin{pmatrix} & 1 & & \\ -1 & & & \\ & & & -1 \\ & & 1 & \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{q} = (q)\rho = \begin{pmatrix} & & 1 & \\ & & & 1 \\ -1 & & & \\ & -1 & & \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{r} = (r)\rho = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & -1 & \\ & 1 & & \\ -1 & & & \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{e}_1 = (e_1)\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{e}_2 = (e_2)\rho = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{e}_3 = (e_3)\rho = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & & 1 \\ & & 1 & \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{e}_4 = (e_4)\rho = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$