問題 1-多元数理科学 (2001 年度前期)

(1)

V を

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \right\}$$

より定義される $\mathbb{R}^3$ の線形部分空間とする.

(1)V の基底をひとくみ求めよ.

(2)$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V$ に対し $\begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix} \in V$ を対応させる V の線形変換を f とする.(1) でもとめた基底に関する f を求めよ.

(解答)

t, s を任意の実数とする. 簡約化を行い

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 1 & s \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -t-s \\ 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 1 & s \end{array} \right)$$

よって V は改めて

$$\begin{aligned} V &= \left\{ t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t, s \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

これが基底の組である. 題意から

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

よって基底に対して

$$\begin{aligned} f \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = e_2 \\ f \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = e_1 - e_2 \end{aligned}$$

すなわち基底に作用する 2×2 行列として

$$f : \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

として表現することができる.(解答終)

問題 2-多元数理科学 (2001 年度前期)

(1)

$\mathbb{R}^3$ において

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} a^2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

で張られるベクトル空間 V の次元を求めよ.

(解答)
それぞれの基底を転置させて行基本変形にて簡約化を行う.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ a^2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a^2 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a^2 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a^2 \end{pmatrix}$$

これより以下にて場合わけができる

$$\dim V = \begin{cases} 1 & (a=1) \\ 2 & (a=-1) \\ 3 & \text{Otherwise} \end{cases}$$

(解答終)

(2

$\mathbb{R}^3$ において 2 つのベクトル

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

によって張られる線形部分空間を W とする. このとき (1) の V とのまじわり

$$\dim(V \cap W) = 1$$

となる a を求めよ.

(解答)
線形代数の次元の公式

$$\dim(V+W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$$

を用いる. まず $\dim W = 2$ であること、また $\dim(V \cap W) = 1$ でなければならないことより

$$\dim(V+W) - \dim V = 1$$

を満たす. 加えて

$$V+W=\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\a\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a^2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix} \right\rangle$$

であるが、

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}$$

は一次独立であるから

$$\dim(V+W)=3$$

よって

$$\dim V=2$$

でなければばならない. これを満たす a は (1) より

$$a=-1$$

(解答終)

問題 3-多元数理科学 (2001 年度前期)

(3)

実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が

$$a_1>-2,$$
$$a_{n+1}=\sqrt{a_n+2} \quad (n=1,2,\cdots)$$

を満たす時
(1)$\{a_n\}$ が（広義）単調数列であることを示せ.
(2) $\{a_n\}$ が収束することを示し, その極限値を求めよ.

問題 4-多元数理科学 (2001 年度前期)

留数計算により以下を求めよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+1}dx$$

(解答)
被積分関数を f とする.

$$\int_{-R}^{R}dx\frac{e^{ix}}{x^2+1}+\int_{C_R}dz\frac{e^{iz}}{z^2+1}=2\pi i\,\mathrm{Res}(f,z=i)$$

二番目の積分について評価を行う. 極座標変換にて $z=Re^{i\theta}$

$$\left|\int_{C_R}dz\frac{e^{iz}}{z^2+1}\right|=\left|\int_0^{\pi}\left(iRe^{i\theta}\right)d\theta\frac{e^{iR(\cos\theta+i\sin\theta)}}{R^2e^{2i\theta}+1}\right|$$
$$\leqslant R\int_0^{\pi}d\theta\frac{e^{-R\sin\theta}}{|R^2e^{2i\theta}+1|}$$

二番目の式は三角不等式を用いた. ここでまた三角不等式

$$\begin{aligned}\left|R^2e^{2i\theta}+1\right| &\geqslant \left|R^2e^{2i\theta}\right|-1\\ &= R^2-1\end{aligned}$$

より

$$\left|\int_{C_R} dz\frac{e^{iz}}{z^2+1}\right| < \frac{R}{R^2-1}\int_0^\pi d\theta e^{-R\sin\theta}$$

残るはよく知られた方法 $-R\sin\theta \leqslant -\frac{R}{\pi} \quad \left(\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$ などにて、

$$\left|\int_{C_R} dz\frac{e^{iz}}{z^2+1}\right| \to 0 \quad (R\to\infty)$$

と絶対収束する. であるから

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} dx\frac{e^{ix}}{x^2+1} &= 2\pi i\,\mathrm{Res}(f,z=i)\\ &= 2\pi i\lim_{z\to i}\frac{e^{ix}}{(z+i)}\\ &= \pi e^{-1}\end{aligned}$$