自由場の積分の評価

プロパゲーター

$$D(x) \equiv -i \int \frac{d^3\vec{k}}{2(2\pi)^3} \frac{e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}}$$

を評価したい. 極座標 $|\vec{k}| = r$、$\vec{k}\cdot\vec{x} = k\cdot x\cdot\cos\theta$ として $0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant r < \infty$ の区間を積分することにより改めてと書ける.

$$D(x) = -\frac{i}{2(2\pi)^3} \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} dr \left(r^2 \sin\theta\right) \frac{e^{-irx\cos\theta}}{\sqrt{r^2 + m^2}}$$

$u = \cos\theta \Rightarrow d\theta = -\frac{du}{\sin\theta}$ として計算していき

$$= -\frac{i}{2(2\pi)^2} \int_0^{\infty} dr \int_{-1}^{1} du \frac{r^2 e^{-irxu}}{\sqrt{r^2 + m^2}}$$

ここで

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} due^{-irxu} &= -\frac{1}{irx}\left(e^{-irx} - e^{irx}\right) \\ &= \frac{e^{irx} - e^{-irx}}{irx} \left(= \frac{2\sin(rx)}{rx}\right) \end{aligned}$$

であるから最終的に

$$\boxed{\begin{aligned} D(x) &= -\frac{1}{2x(2\pi)^2}\left[\int_0^{\infty} dr \frac{re^{irx}}{\sqrt{r^2+m^2}} - \int_0^{\infty} dr \frac{re^{-irx}}{\sqrt{r^2+m^2}}\right] \\ &= -\frac{1}{2x(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty} dr \frac{re^{irx}}{\sqrt{r^2+m^2}} \cdots (*) \end{aligned}}$$

と書ける. もしくは

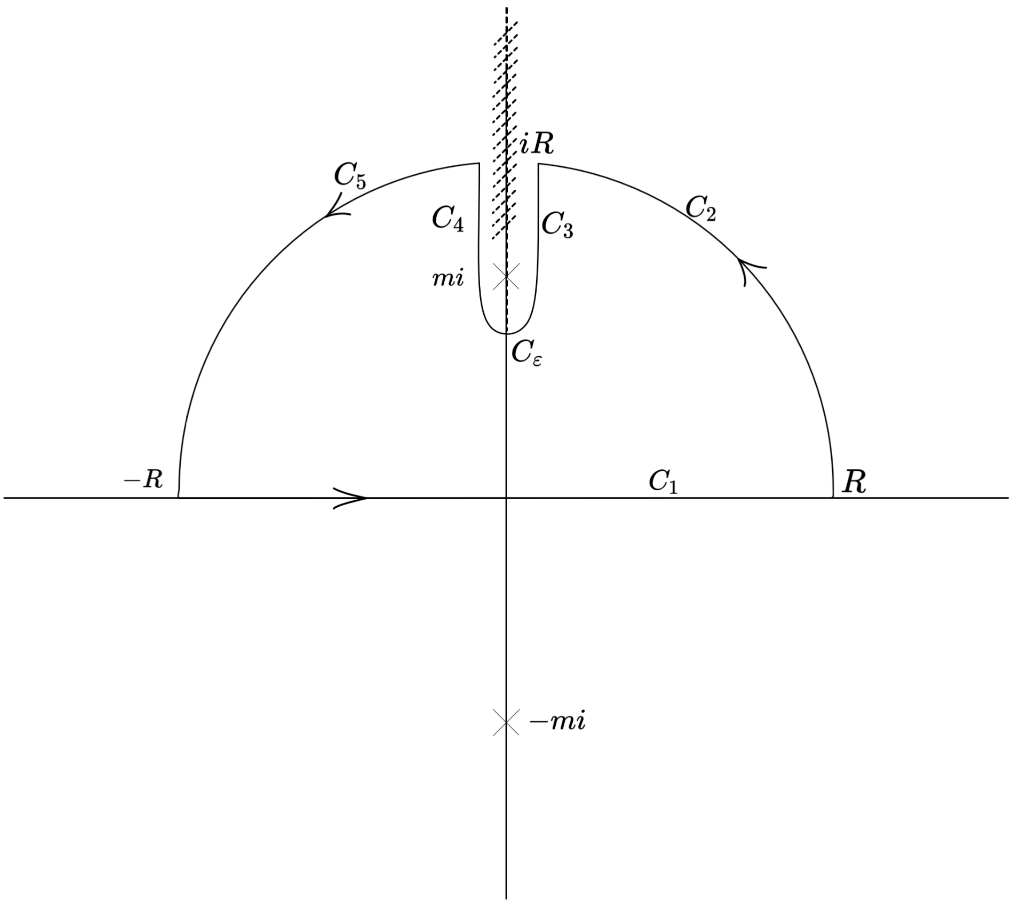
$$D(x) = -\frac{i}{x(2\pi)^2} \int_0^{\infty} dr \frac{r\sin(rx)}{\sqrt{r^2+m^2}}.$$

命題

以下の積分路をとることで

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ue^{ixu}}{\sqrt{(u+mi)(u-mi)}}du = -2i\int_{m}^{\infty} \frac{ue^{-xu}}{\sqrt{(u+m)(u-m)}}du$$

が示される.



被積分関数は $z = \pm mi$ において分岐をもつが、上の路において 2 つ以上の分岐を渡ることはない. 上の積分において主値を被積分関数とする. また分岐を中心とする極座標表示を以下とすると

$$\begin{cases} z - mi = r_1 e^{i\theta_1} \\ z + mi = r_2 e^{i\theta_2} \end{cases}$$

被積分関数は

$$f(z) = \frac{e^{ix\left(r_1 e^{i\theta_1} + r_2 e^{i\theta_2}\right)/2}}{\sqrt{r_1 r_2} e^{i(\theta_1+\theta_2)/2}} \left(\frac{r_1 e^{i\theta_1} + r_2 e^{i\theta_2}}{2} \right)$$

と書ける.

C_3, C_4 の評価

積分路 C_3 について $\theta_1 = \pi/2, \theta_2 = \pi/2$ また $r_2 = r_1 + 2m$,$z = i(r_1 + m)$ であるから

$$f = f(r_1) = \frac{i(r_1 + m)\, e^{-x(r_1+m)}}{\sqrt{r_1(r_1 + 2m)i}} \qquad (0 \leqslant r_1 \leqslant R)$$

よって

$$\int_{C_3} dz f(z) = \int_R^0 (idr_1) \frac{i(r_1 + m)\, e^{-x(r_1+m)}}{\sqrt{r_1(r_1 + 2m)i}}$$

変数変換 $r_1 = u - m$ をして

$$\begin{aligned} &= -i \int_m^{R+m} du \frac{ue^{-xu}}{\sqrt{(u-m)(u+m)}} \\ &\to -i \int_m^{+\infty} du \frac{ue^{-xu}}{\sqrt{(u-m)(u+m)}} \quad (R \to \infty) \end{aligned}$$

積分路 C_4 について $\theta_1 = -3\pi/2, \theta_2 = \pi/2$ また $r_2 = r_1 + 2m$,$z = i(r_1 + m)$ であるから

$$f = f(r_1) = \frac{i(r_1 + m)\, e^{-x(r_1+m)}}{\sqrt{r_1(r_1 + 2m)}(-i)} \quad (0 \leqslant r_1 \leqslant R)$$

よって

$$\int_{C_4} dz f(z) = \int_0^R (idr_1) \frac{i(r_1 + m)\, e^{-x(r_1+m)}}{\sqrt{r_1(r_1 + 2m)}(-i)}$$

$$\to -i \int_m^{+\infty} du \frac{ue^{-xu}}{\sqrt{(u-m)(u+m)}} \quad (R \to \infty)$$

以上より

$$\left(\int_{C_3} + \int_{C_4} \right) dz f(z) \to -2i \int_m^{+\infty} du \frac{ue^{-xu}}{\sqrt{(u-m)(u+m)}} \quad (R \to \infty)$$

C_ε の評価

積分路 C_ε においては $z - mi = \varepsilon e^{i\theta}$ と書ける. これより被積分関数は

$$f = f(\theta) = \frac{\left(\varepsilon e^{i\theta} + mi\right) e^{ix\left(\varepsilon e^{i\theta} + mi\right)}}{\sqrt{\varepsilon r_2} e^{i(\theta + \theta_2)/2}}$$

である. この積分が $\varepsilon \to 0$ において 0 へ収束することを示す.

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_\varepsilon} dz f(z) \right| &\leqslant \int_{-\frac{3}{2}\pi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\varepsilon \cos\theta + i(\varepsilon \sin\theta + m)| e^{-x(\varepsilon \sin\theta + m)}}{\sqrt{\varepsilon r_2}} |\varepsilon d\theta| \\ &= \frac{e^{-mx}}{\sqrt{\varepsilon r_2}} \int_{-\frac{3}{2}\pi}^{\frac{\pi}{2}} \left(\varepsilon^2 \cos^2\theta + \varepsilon^2 \sin^2\theta + 2\varepsilon \sin\theta m + m^2\right) e^{-x(\varepsilon \sin\theta)} |\varepsilon d\theta| \end{aligned}$$

$-1 \leqslant \sin\theta, \cos\theta \leqslant 1$ であるから

$$< \sqrt{\frac{\varepsilon}{r_2}} e^{-mx} \left(2\varepsilon^2 + 2\varepsilon m + m^2\right) \int_{-\frac{3}{2}\pi}^{\frac{\pi}{2}} e^{-x\varepsilon \sin\theta} d\theta$$

また

$$\begin{aligned} & -x\varepsilon \leqslant -x\varepsilon \sin\theta \leqslant x\varepsilon \\ \Rightarrow & e^{-x\varepsilon} \leqslant e^{-x\varepsilon \sin\theta} \leqslant e^{x\varepsilon}. \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} & < \sqrt{\frac{\varepsilon}{r_2}} e^{x(\varepsilon - m)} (2\pi) \left(2\varepsilon^2 + 2\varepsilon m + m^2\right) \\ & \to 0 \quad (\varepsilon \to 0). \end{aligned}$$

よって収束する.

C_2, C_5 の評価

$z = 0$ 中心の極座標を $z = Re^{i\theta}$ とする. このとき

$$\begin{cases} Re^{i\theta} = r_1 e^{i\theta_1} + mi \\ Re^{i\theta} = r_2 e^{i\theta_2} - mi \end{cases}$$

の虚部と実部の関係から

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{R^2 - 2mR\sin\theta + m^2} \\ r_2 &= \sqrt{R^2 + 2mR\sin\theta + m^2} \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned} \cos\theta_1 &= \frac{R\cos\theta}{r_1} &&= \frac{R\cos\theta}{\sqrt{R^2 - 2mR\sin\theta + m^2}} \\ \sin\theta_1 &= \frac{R\sin\theta - m}{r_1} &&= \frac{R\sin\theta - m}{\sqrt{R^2 - 2mR\sin\theta + m^2}} \end{aligned}$$

を得る.

これより

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_2} dz f(z) \right| &= \left| \int_0^{\pi/2} \left(iRe^{i\theta}\right) d\theta \frac{\left(Re^{i\theta}\right) e^{ixRe^{i\theta}}}{\left\{\left(R^2 + 2mR\sin\theta + m^2\right)\left(R^2 - 2mR\sin\theta + m^2\right)\right)^{1/4} e^{i(\theta_1 + \theta_2)/2}} \right| \\ &\leqslant \int_0^{\pi/2} R^2 d\theta \quad \frac{e^{-Rx\sin\theta}}{\left\{\left(R^2 + 2mR\sin\theta + m^2\right)\left(R^2 - 2mR\sin\theta + m^2\right)\right\}^{1/4}} \end{aligned}$$

ここで

$$-2mR \leqslant 2mR\sin\theta \leqslant 2mR$$

より

$$(R - m)^2 \leqslant R^2 + 2mR\sin\theta + m^2 \leqslant (R + m)^2$$

同様に

$$(R - m)^2 \leqslant R^2 - 2mR\sin\theta + m^2 \leqslant (R + m)^2$$

であるから

$$\leqslant \frac{R^2}{(R-m)}\int_0^{\pi/2} d\theta e^{-Rx\sin\theta}$$

また積分区間において $\sin\theta > \frac{2}{\pi}\theta$ であるから $e^{-Rx\sin\theta} < e^{-Rx\frac{2}{\pi}\theta}$ よって

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} d\theta e^{-Rx\sin\theta} &< \int_0^{\pi/2} d\theta e^{-Rx\frac{2}{\pi}\theta} \\ &= -\frac{\pi}{2xR}\left[e^{-Rx\frac{2}{\pi}\theta}\right]_0^{\pi/2} \\ &= -\frac{\pi}{2xR}\left(e^{-Rx}-1\right)\end{aligned}$$

とかけるから

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_2} dzf(z)\right| &< \frac{R^2}{(R-m)}\left(-\frac{\pi}{2xR}\right)\left(e^{-Rx}-1\right). \\ &= \frac{R\pi}{2x(R-m)}\left(1-e^{-Rx}\right). \\ &= \frac{\pi}{2x(1-m/R)}\left(1-e^{-Rx}\right). \\ &\to \frac{\pi}{2x} \quad (R\to\infty).\end{aligned}$$

(追記中)

まとめ

以上、コーシーの積分定理から

$$\begin{aligned}&\left(\int_{c_1}+\int_{c_2}+\int_{c_3}+\int_{c_4}+\int_{c_5}+\int_{c_\varepsilon}\right)dzf(z) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{ue^{ixu}}{\sqrt{(u+mi)(u-mi)}}du - 2i\int_m^{\infty}\frac{ue^{-xu}}{\sqrt{(u+m)(u-m)}}du \\ &= 0\end{aligned}$$

以上にて示された. この積分は

$$\begin{aligned}\int_m^{\infty}\frac{ue^{-xu}}{\sqrt{(u+m)(u-m)}}du &= \int_m^{\infty}\frac{ue^{-xu}}{\sqrt{u^2-m^2}}du \\ &= \int_m^{\infty}\frac{ue^{-xu}}{u\sqrt{1-\left(\frac{m}{u}\right)^2}}du \\ &= \int_m^{\infty}\frac{e^{-xu}}{\sqrt{1-\left(\frac{m}{u}\right)^2}}du\end{aligned}$$

ここで Taylor 展開

$$\frac{1}{\sqrt{1-q}} = 1+\frac{1}{2}q+\frac{3}{8}q^2+\cdots$$

より $q = (m/u)^2 < 1$(特に $u \to \infty$ に対して $(m/u)^2 << 1$ となる.)

$$\begin{aligned}
&\sim \int_m^\infty e^{-xu}\left(1+\frac{1}{2}\frac{m^2}{u^2}\right)du \\
&= \int_m^\infty e^{-xu}du + \frac{1}{2}m^2\int_m^\infty \frac{e^{-xu}}{u^2}dx. \\
&= -\frac{e^{-mx}}{x} + \frac{m^2}{2}\int_m^\infty \frac{e^{-xu}}{u^2}du. \\
&\sim -\frac{e^{-mx}}{x}
\end{aligned}$$

と近似される. これより

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ue^{ixu}}{\sqrt{(u+mi)(u-mi)}} \sim 2i\left(-\frac{e^{-mx}}{x}\right)$$

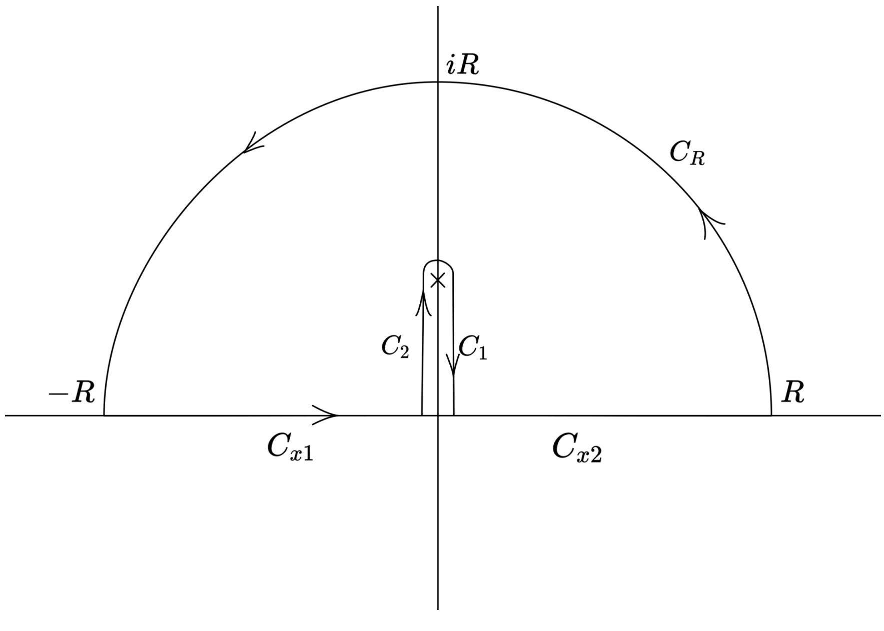
以上からプロパゲーターは

$$\boxed{\begin{aligned}
D(x) &\sim -\frac{1}{2x(2\pi)^2}2i\left(-\frac{e^{-mx}}{x}\right) \\
&= \frac{ie^{-mx}}{(2\pi x)^2}
\end{aligned}}$$

と求められることが分かる.

補足

別の積分路を取ることにて以下の関係式も導き出せる.



$$\int_0^m \frac{ue^{-xu}}{\sqrt{(m-u)(m+u)}}du = -\int_0^\infty \frac{u\cos(xu)}{\sqrt{u^2+m^2}}du$$

マットレス場の 2 粒子の相互作用

Misaki Ohta,University of the Ryukyus

2022 年 5 月 3 日

以前学んだようにマットレス場における確率振幅 Z は

$$Z = \int D\varphi e^{i\int d^4x\left[-\frac{1}{2}\varphi\left(\partial^2+m^2\right)\varphi+J\varphi\right]}$$

と書けるのであった. これはまさに Gauss 積分の公式にて

$$\to Z(J=0)e^{-\frac{i}{2}\iint d^4xd^4y\cdot J(x)D(x-y)J(y)}.$$

と変形できた. 今 W として

$$Z \equiv Z(J=0)e^{iW(J)}$$

と定義する. すなわち

$$W(J) = -\frac{1}{2}\iint d^4xd^4yJ(x)D(x-y)J(y).$$

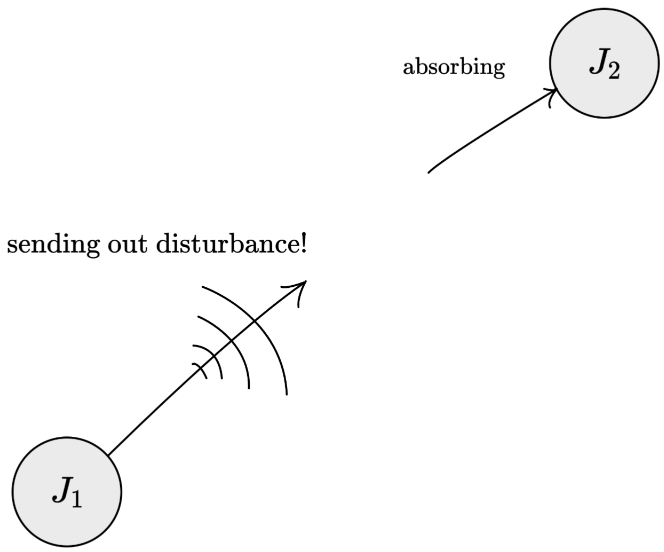
ただし $D(x-y)$ は

$$D(x-y) \equiv \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{ik(x-y)}}{k^2-m^2+i\varepsilon}$$

である. これを W へ代入し

$$\begin{aligned}
W(J) &= -\frac{1}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left(\int d^4xJ(x)e^{ikx}\right)\frac{1}{k^2-m^2+i\varepsilon}\left(\int d^4yJ(y)e^{-iky}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left(\int d^4xJ(x)e^{-ikx}\right)^*\frac{1}{k^2-m^2+i\varepsilon}\left(\int d^4yJ(y)e^{-iky}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}J(k)^*\frac{1}{k^2-m^2+i\varepsilon}J(k).
\end{aligned}$$

と書ける. ただし $J(k) \equiv \int d^4xe^{-ikx}J(x)$ と定義している. 今ソース $J(x) = J_1(x) + J_2(x)$ と二つのソースの和で書ける時、



以下の 4 つの和となるが

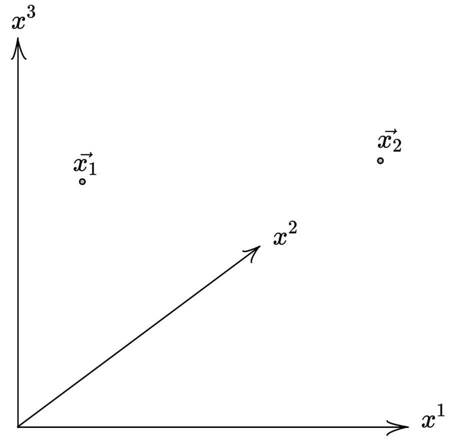
$$
\begin{aligned}
W(J) &= -\frac{1}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left(J_1(x)+J_2(x)\right)^* \frac{1}{k^2-m^2+i\varepsilon}\left(J_1(x)+J_2(x)\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left[\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{J_1^* J_1}{k^2-m^2+i\varepsilon}+\frac{J_1^* J_2}{k^2-m^2+i\varepsilon}+\frac{J_2^* J_1}{k^2-m^2+i\varepsilon}+\frac{J_2^* J_2}{k^2-m^2+i\varepsilon}\right]
\end{aligned}
$$

以降相互作用である J_1J_1, J_2J_2 は無視して考えるものとする. 上の式より明らかに $k^2=m^2$ の時、もしくは J_1, J_2 の重複が大きいときに W の値が大きくなる.

今ソースを 3 次元空間に局在する粒子として

$$
\begin{aligned}
J(x) &= J_1(x)+J_2(x) \\
&= \delta^{(3)}\left(\vec{x}-\overrightarrow{x_1}\right)+\delta^{(3)}\left(\vec{x}-\overrightarrow{x_2}\right)
\end{aligned}
$$

と表すことにする.



このとき W は

$$
\begin{aligned}
W(J) &= -\frac{1}{2}\iint d^4x d^4y J(x) D(x-y) J(y) \\
&= -\frac{1}{2}\iint d^4x d^4y \Big[\delta^{(3)}\left(\overrightarrow{x}-\vec{x}_1\right)+\delta^{(3)}\left(\vec{x}-\vec{x}_2\right)\Big] D(x-y).\Big[\delta^{(3)}\left(\vec{y}-\vec{y}_1\right)+\delta^{(3)}\left(\vec{y}-\vec{y}_2\right)\Big]
\end{aligned}
$$

自己相互作用を無視して

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}\left[\iint dx^0 dy^0 \int \frac{dk^0}{(2\pi)} e^{ik^0(x-y)^0} \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2-m^2+i\varepsilon} \iint d^3x d^3y \delta(\vec{x}-\vec{x}_1)\ \ e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})} \delta\left(\vec{y}-\vec{y}_2\right)\right. \\
&\quad + \delta\left(\vec{x}-\vec{x}_2\right) e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})} \delta\left(\vec{y}-\vec{y}_1\right)] \\
&= -\frac{1}{2}\left[\iint dx^0 dy^0 \int \frac{dk^0}{(2\pi)} e^{ik^0(x-y)^0} \int \frac{d^3\vec{k}^0}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2-m^2+i\varepsilon}\left(e^{i\vec{k}\left(\overrightarrow{x_1}-\overrightarrow{x_2}\right)}+e^{i\vec{k}\left(\overrightarrow{x_2}-\overrightarrow{x_1}\right)}\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
W(J) = &-\frac{1}{2}\iint dx^0 dy^0 \int \frac{dk^0}{(2\pi)} e^{ik^0(x-y)^0} \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{k}(\vec{x}_1-\vec{x}_2)}}{k^2-m^2+i\varepsilon} \\
&-\frac{1}{2}\iint dx^0 dy^0 \int \frac{dk^0}{(2\pi)} e^{ik^0(x-y)^0} \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{ik(x_2-\vec{x}_1)}}{k^2-m^2+d\varepsilon}
\end{aligned}
$$

ここで右辺第二項に対して $x^0 \to -x^0, y^0 \to -y^0, k^0 \to -k^0, \vec{k} \to -\vec{k}$ としてやれば改めて W は

$$
\boxed{W(J) = -\iint dx^0 dy^0 \int \frac{dk^0}{(2\pi)} e^{ik^0(x-y)^0} \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{k}\left(\vec{x}_1-\overrightarrow{x_2}\right)}}{k^2-m^2+i\varepsilon}}
$$

と書ける. 一旦 y^0 について積分し $\delta(k_0)$ を得たあと、それを使って k^0 で積分する. つまり

$$
\begin{aligned}
&= -\int dx^0 dk^0 \left(\int \frac{dy^0}{2\pi} e^{-ik^0y^0}\right) e^{ik^0x^0} \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{ik\left(\overrightarrow{x_1}-\overrightarrow{x_2}\right)}}{k^2-m^2+i\varepsilon} \\
&= -\int dx^0 \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \left(\int dk^0 \delta\left(k^0\right) \frac{e^{i\vec{k}(\vec{x}_1-\vec{x}_2)}}{k^2-m^2+i\varepsilon} e^{ik^0x^0}\right) \\
&= -\int dx^0 \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{k}\left(\overrightarrow{x_1}-\overrightarrow{x_2}\right)}}{-\vec{k}^2-m^2+i\varepsilon}
\end{aligned}
$$

今、$\varepsilon \to 0$ の極限を取ることにて

$$W(J) = \int dx^0 \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{k}\left(\overrightarrow{x_1}-\overrightarrow{x_2}\right)}}{\overrightarrow{k^2}+m^2}$$

を得る.

積分の評価について

$$I = \int \frac{d\overrightarrow{^3}k}{(2\pi)^3} \frac{e^{\vec{i}k\left(\overrightarrow{x_1}-\overrightarrow{x_2}\right)}}{\overrightarrow{k^2}+m^2}$$

を評価したい. この積分値は次元解析から $r^{-1} = m$ の次元をもつことは容易にわかる. 今この積分を評価し実際に確かめてみたい.$\vec{x} \equiv \overrightarrow{x_1} - \overrightarrow{x_2}, u \equiv \cos\theta, \quad |\vec{k}| \equiv k, |\vec{x}| \equiv r$ として $\vec{k} \cdot \vec{x} = kr\cos\theta$ となるように θ をとる. 極座標変換にて積分は

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \frac{e^{ikr\cos\theta}}{k^2+m^2} \cdot k^2 \sin\theta. \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \int_0^\pi d\theta \frac{e^{ik\cos\theta}}{k^2+m^2} k^2 \sin\theta \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \left(\frac{k^2}{k^2+m^2}\right) \int_0^\pi d\theta \sin\theta e^{ikr\cos\theta.}
\end{aligned}$$

と変形されていく. $u = \cos\theta.$ として

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \left(\frac{k^2}{k^2+m^2}\right) \int_{-1}^1 du e^{ikru} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \left(\frac{k^2}{k^2+m^2}\right) \frac{1}{ikr} \left[e^{ikru}\right]_{-1}^1 \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \left(\frac{k^2}{k^2+m^2}\right) \frac{2}{kr} \sin(kr). \\
&= \frac{1}{2\pi^2 r} \int_0^\infty dk \frac{k\sin(kr)}{k^2+m^2}.
\end{aligned}$$

最後の被積分関数は偶関数であるから

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\pi^2 r} \int_{-\infty}^\infty dk \frac{k\sin(kr)}{k^2+m^2} \\
&= \frac{1}{4\pi r} \int_{-\infty}^\infty dk \frac{k}{2i\left(k^2+m^2\right)} \left(e^{ikr} - e^{-ikr}\right) \\
&= \frac{1}{4i\pi^2 r} \left[\int_{-\infty}^\infty dk \frac{ke^{ikr}}{k^2+m^2} - \int_{-\infty}^\infty dk \frac{ke^{-ikr}}{k^2+m^2}\right].
\end{aligned}$$

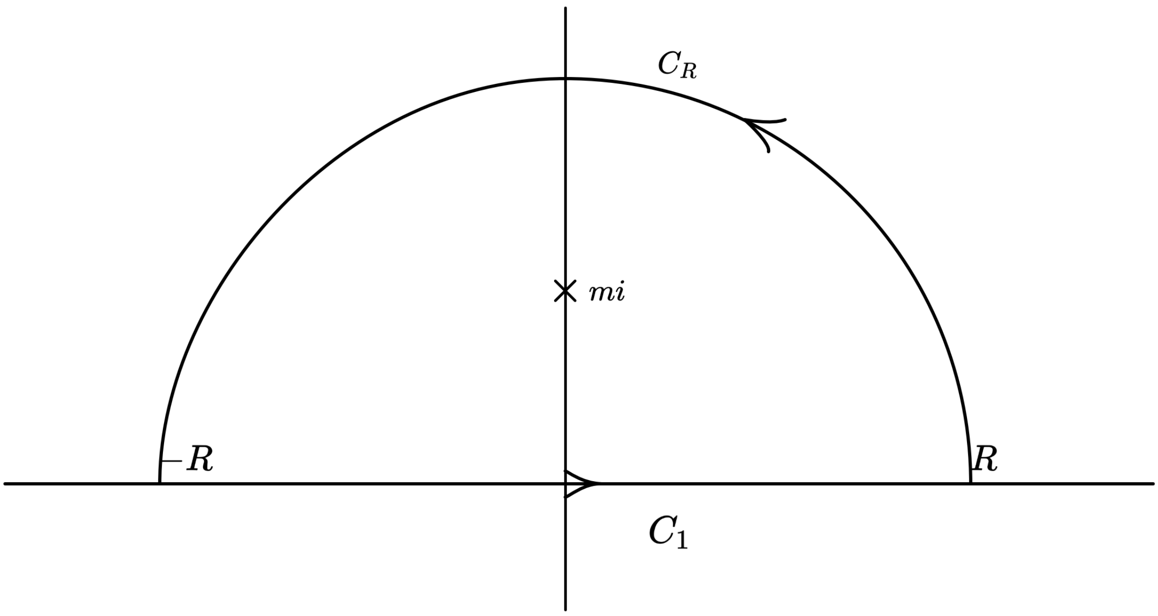
右辺第二項について $k \to -k$ として

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4i\pi^2 r} \int_{-\infty}^\infty dk \frac{ke^{ikr}}{k^2+m^2} \\
&= \frac{1}{4i\pi^2 r} \int_{-\infty}^\infty dk \frac{ke^{ikr}}{k^2+m^2}
\end{aligned}$$

ここで積分

$$I_k = \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{ke^{ikr}}{k^2+m^2}$$

を以下の路を取ることにて評価する. まず $r>0$ であるから上半平面の半円は収束する.



実際、被積分関数を $f(z)$、極座標表示 $z = Re^{i\theta}$ として

$$\begin{aligned}
\left|\int_{C_R} f(z)dz\right| &= \left|\int_0^\pi \frac{Re^{i\theta}e^{i\left(Re^{i\theta}\right)r}}{R^2e^{2i\theta}+m^2} iRe^{i\theta}d\theta\right| \\
&= \left|\int_0^\pi \frac{Re^{i\theta}e^{rR(\cos\theta - \sin\theta)}}{R^2e^{2i\theta}+m^2} \cdot iRe^{i\theta}d\theta\right| \\
&\le \int_0^\pi \frac{R^2e^{-r\sin\theta}}{|R^2e^{2i\theta}+m^2|}d\theta \\
&< \frac{R^2}{R^2-m^2}\int_0^\pi e^{-rR\sin\theta}d\theta \\
&= \frac{2R^2}{R^2-m^2}\int_0^{\pi/2} e^{-rR\sin\theta}d\theta \\
&< \frac{2R^2}{R^2-m^2}\int_0^{\pi/2} e^{-rR\frac{2}{\pi}\theta}d\theta \\
&= \frac{2R^2}{R^2-m^2}\left(-\frac{\pi}{2rR}\right)\left[e^{-rR}-1\right] \\
&= \frac{\pi}{R-m^2/R}\left(1-e^{-rR}\right) \\
&\to 0 \quad (R\to\infty)
\end{aligned}$$

となる. ただし途中で三角不等式や $\frac{2}{\pi}x < \sin x < x \quad (0 < x < \pi/2)$ であることを用いた. 以上留数定理にて

$$\begin{aligned}
\int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz &= 2\pi i \,\mathrm{Res}(f(z), z = mi) \\
\to \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= 2\pi i \,\mathrm{Res}(f(z), z = mi) \qquad (R \to \infty) \\
&= 2\pi i \lim_{z \to mi} (z - mi) \frac{ze^{izr}}{(z - mi)(z + mi)} \\
&= \pi i e^{-mr}
\end{aligned}$$

以上より

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{4i\pi^2 r} \pi i e^{-mr} \\
&= \frac{1}{4\pi r} e^{-mr}
\end{aligned}$$

ともとまる. 結果改めて

$$\boxed{\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{k}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}}{\overrightarrow{k}^2 + m^2} = \frac{e^{-m|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}}{4\pi \left|\overrightarrow{x_1} - \overrightarrow{x_2}\right|}}$$

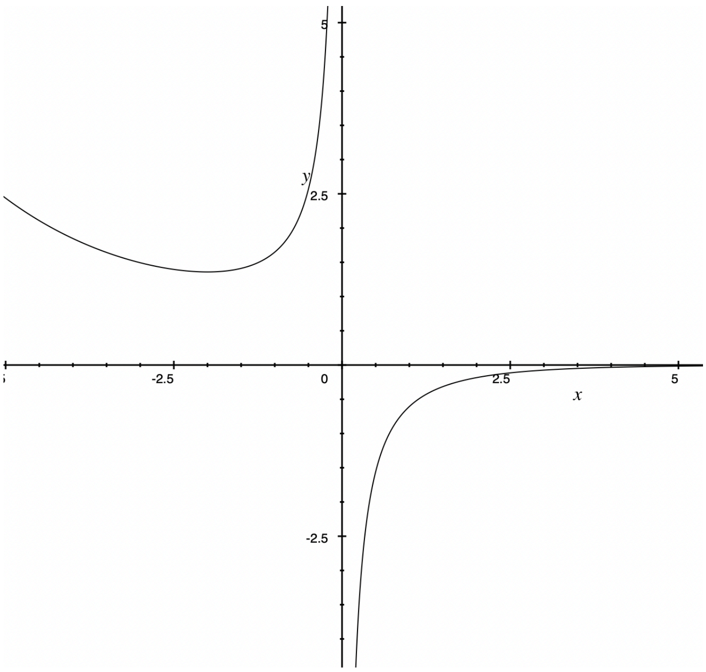
となる. これより

$$W(J) = \left(\int dx^0 \right) \frac{e^{-m|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}}{4\pi \left|\overrightarrow{x_1} - \overrightarrow{x_2}\right|}$$

であるが、そもそも確率振幅は $Z = e^{iW(T)} = e^{-iET}$ であったから

$$E = -\frac{e^{-mr}}{4\pi r} < 0 \quad (r = |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|)$$

と書くことができる.(図からも明らかなように $r \to \infty$ で $E = 0$ となる.)



単純にマットレス場を考えて、ソースとして 2 点の δ 関数を用意しただけにもかかわらず、上のように物理でお馴染みのポテンシャルが導出されたことは非常に感動的な結果である!!ソースを適当な値に変更したり、増やしたりするとどうなるのかというのは、素朴に行ってみる問題だろう.