Motivation

このセクション 1.5 ではなぜ同符号の電荷は反発しあうのかについて考察を行う. ここでのラグランジアンはマクスウェルラグランジアン

$$\mathcal{L}_{\mathrm{maxwell}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

へ質量項を加えたラグランジアンであり、それに対しての作用における確率振幅を計算し同符号が反発しあう根拠を述べたい. また重力についても簡単に考察を行う. 理解を深めるため、本章へ入る前にそもそも $F_{\mu\nu}$ とはなんだったかの復習から始めよう.

1 $F_{\mu\nu}$ について

1.1 $F_{\mu\nu}$ の性質のいくつか

マクスウェルのラグランジアン ($J^\mu = 0$ の場合)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) .$$

を思い出す. 定義より例えば具体的な成分は

$$\begin{cases} F_{12} = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = B_3. \\ F_{23} = \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2 = B_1 \\ F_{31} = \partial_3 A_1 - \partial_1 A_3 = B_2. \end{cases}$$

がある. これはマクスウェル方程式

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$$
$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \nabla \phi$$

にしたがった. この 2 階テンソル (行列) を全て書くと以下のようになる.

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

である. これからすぐに

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

であることもわかり、このことからマクスウェルラグランジアン $\mathcal{L}$ が実際

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{B}^2 \right)$$

であることもわかる. 加えて以下の式が等価であることも実際に計算して示すことができ

$$\begin{cases} \nabla \times \boldsymbol{E} + \dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \\ \partial_i F_{jk} + \partial_j F_{ki} + \partial_k F_{ij} = 0 \end{cases}$$

下の関係式はビアンキ恒等式 (Bianchi identity) と呼ばれている.

1.2 $F_{\mu\nu}$ の変分

$F_{\mu\nu}$ の変分をとることにより

$$\boxed{\partial^{\mu} F_{\mu\nu} = \Box A_{\nu} - \partial_{\nu}\partial^{\mu} A_{\mu} = 0}$$

であることを示す. 作用 S の変分は

$$\begin{aligned}\delta S &= S\left(A_{\mu} + \delta A_{\mu}\right) - S\left(A_{\mu}\right)\\ &= -\frac{1}{4}\left[\int d^4x \left[\partial_{\mu}\left(A_{\nu} + \delta A_{\nu}\right) - \partial_{\nu}\left(A_{\mu} + \delta A_{\mu}\right]^2 - \left(\partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}\right)^2\right]\end{aligned}$$

ただし $\left(\partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}\right)^2 \equiv \left(\partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}\right)\left(\partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu}\right)$ としている.
書き換えて

$$= -\frac{1}{4}\left[\int d^4x \left\{\left(\partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}\right) + \left(\partial_{\mu}\delta A_{\nu} - \partial_{\nu}\delta A_{\mu}\right)\right\}^2 - \left(\partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}\right)^2\right]$$

展開して

$$= -\frac{1}{4}\left[\int d^4x \left(\partial_{\mu}\delta A_{\nu} - \partial_{\nu}\delta A_{\mu}\right)^2 + 2\left(\partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}\right)\left(\partial^{\mu}\delta A^{\nu} - \partial^{\nu}\delta A^{\mu}\right)\right]$$

ここで δA_i を微小としているから 2 次の項は無視でき

$$= -\frac{1}{2}\int d^4x \left(\partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}\right)\left(\partial^{\mu}\delta A^{\nu} - \partial^{\nu}\delta A^{\mu}\right).$$

展開して計算し

$$\begin{aligned}&= -\frac{1}{2}\int d^4x \Box A_{\nu}\delta A^{\nu} + \Box A_{\mu}\delta A^{\mu} - \partial_{\mu} A_{\nu}\partial^{\nu}\delta A^{\mu} - \partial_{\nu} A_{\mu}\partial^{\mu}\delta A^{\nu}\\ &= -\int d^4x \Box A_{\nu}\delta A^{\nu} - \partial_{\mu} A_{\nu}\partial^{\nu}\delta A^{\mu}\end{aligned}$$

ここで第 2 項について部分積分をするために

$$\begin{aligned}\partial^{\nu}\left(\partial_{\mu} A_{\nu}\delta A^{\mu}\right) &= \left(\partial^{\nu}\partial_{\mu} A_{\nu}\right)\delta A^{\mu} + \partial_{\mu} A_{\nu}\partial^{\nu}\left(\delta A^{\mu}\right).\\ \Rightarrow \partial_{\mu} A_{\nu}\partial^{\nu}\left(\delta A^{\mu}\right) &= \partial^{\nu}\left(\partial_{\mu} A_{\nu}\delta A^{\mu}\right) - \left(\partial_{\mu}\partial^{\nu} A_{\nu}\right)\delta A^{\mu}\end{aligned}$$

である変形をして、いつものように

$$\int d^4x \partial^{\nu}\left(\partial_{\mu} A_{\nu}\delta A^{\mu}\right) = 0$$

なるようにして良いから結局

$$\delta S = \int d^4x \left(\Box A_{\mu} - \partial_{\mu}\partial^{\nu} A_{\nu}\right)\delta A^{\mu}$$

と書くことができる.(途中で添字を入れ替えたりしたことに注意)
この変分が 0 であるためには

$$\Box A_{\mu} - \partial_{\mu}\partial^{\nu} A_{\nu} = 0$$

であればよい. 以上にて示された.

1.3 $F_{\mu\nu}$ のゲージ対称性

$F_{\mu\nu}$ がゲージ変換

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \omega$$

において不変であることは容易に示される. 実際

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \\
&\to \partial_\mu (A_\nu + \partial_\nu \omega) - \partial_\nu (A_\mu + \partial_\mu \omega) \\
&= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \partial_\mu \partial_\nu \omega - \partial_\nu \partial_\mu \omega. \\
&= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \\
&= F_{\mu\nu}
\end{aligned}$$

1.4 $F_{\mu\nu}$ の符号

マクスウェルラグランジアンの先頭につく符号は $(\partial_0 A_i)^2$ の係数の符号とクラインゴルドン方程式の $(\partial_0 \varphi)^2$ の符号に対応があり、理にかなっている.

1.5 J がある場合のマクスウェルラグランジアン

4 元電流は

$$J^\mu \equiv (\rho, \boldsymbol{J})$$

にて定義される. ただし ρ を電荷密度、$\boldsymbol{J}$ は電流密度である. これを含むラグランジアン密度は

$$\mathcal{L}_{\mathrm{maxwell}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - J^\mu A_\mu$$

これから上と同様に変分をとることで

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$$

が得られる. 定義より

$$J^\nu = \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu).$$

であった. 左から ∂_ν をかけて

$$\begin{aligned}
\partial_\nu J^\nu &= \partial_\nu \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\
&= \Box \partial_\nu A^\nu - \Box \partial_\mu A^\mu \\
&= \Box \partial_\nu A^\nu - \Box \partial_\nu A^\nu \\
&= 0
\end{aligned}$$

すなわち

$$\boxed{\partial_\nu J^\nu = 0}$$

よって 4 元電流が保存されることは、マクスウェル方程式にて補償される.

Maxwell 方程式

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$
$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$
$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

2 Maxwell ラグランジアンのプロパゲーター

ここでフォトンに質量を与えるため

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &\to -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu + A_\mu J^\mu \end{aligned}$$

を考える. この文脈におけるソースは上で定義した 4 元電流

$$J^\mu \equiv (\rho, \boldsymbol{J})$$

のように思って良いだろう. ゆえに

$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

も成立しているとして進めていく. またこの式と自由場のラグランジアン $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left\{\left[(\partial\varphi)^2 - m^2\varphi^2\right] + J\varphi\right\}$ を比較してみると.$A_\mu A^\mu = \phi^2 - \left(A^1\right)^2 - \left(A^2\right)^2 - \left(A^3\right)^2$ より $m^2\varphi^2$ の項の符号は確かに一致しており、整合がとれていることが確認できる.

meson のベクトル場の理論は以下の経路積分で定義されている.(これは Proca Formalizm として知られている.)

$$Z = \int DAe^{iS(A)} \equiv e^{iW(J)}$$

$$S(A) = \int d^4x\mathcal{L} = \int d^4x \left\{\frac{1}{2}A_\mu \left[\left(\partial^2 + m^2\right)g^{\mu\nu} - \partial^\mu\partial^\nu\right]A_\nu + A_\mu J^\mu\right\}$$

この作用は実際、最上で述べたラグランジアン密度による作用に等しく

$$
\begin{aligned}
S &= \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu + A_\mu J^\mu \right] \\
&= \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} A_\mu \left[\left(\partial^2 + m^2 \right) g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu \right] A_\nu + A_\mu J^\mu \right\}
\end{aligned}
$$

である. なぜなら

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu + A_\mu J^\mu \\
&= -\frac{1}{2} \partial_\nu A_\mu \partial^\nu A^\mu + \frac{1}{2} \partial_\nu A_\mu \partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu + A_\mu J^\mu \\
&\overset{\nabla}{=} \frac{1}{2} A_\mu \Box A^\mu - \frac{1}{2} A_\mu \partial^\mu \partial_\nu A^\nu + \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu + A_\mu J^\mu \\
&= \frac{1}{2} A_\mu \left[\left(\Box + m^2 \right) g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu \right] A_\nu + A_\mu J^\mu
\end{aligned}
$$

ただし $\overset{\nabla}{=}$ は部分積分を表す.

この形式化は以下

$$
\left\{ \begin{array}{l} \left(\partial^2 + m^2 \right) A_\mu = 0 \\ \partial_\mu A^\mu = 0 \end{array} \right.
$$

を明らかに満たす.

さて、いまから例の Gauss 積分を思い出し、Green 関数を調べていきたい.

$$
\int_{-\infty}^{\infty} dq_1 dq_2 \ldots dq_N e^{(i/2)qAq + iJq} = \left\{ \frac{(2\pi i)^N}{\det[A]} \right\}^{1/2} e^{-(i/2)JA^{-1}J}
$$

これよりやはり行列 A にあたるものは $\left[\left(\partial^2 + m^2 \right) g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu \right]$ であるから、

$$
\left[\left(\partial^2 + m^2 \right) g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu \right] D_{\nu\lambda}(x) = \delta^\mu_\lambda \delta^{(4)}(x) \qquad \cdots (*)
$$

を満たす $D_{\nu\lambda}$ が Green 関数となる. 今 Fourier 変換

$$
D_{\nu\lambda}(x) \equiv \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} D_{\nu\lambda}(k) e^{ikx}
$$

と定義する. これを $(*)$ へ代入し

$$
\begin{aligned}
(LHS) &= \left[\left(\partial^2 + m^2 \right) g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu \right] \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} D_{\nu\lambda}(k) e^{ikx} \\
&= g^{\mu\nu} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(-k^2 + m^2 \right) D_{\nu\lambda}(k) e^{ikx} - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(ik^\mu \right) \left(ik^\nu \right) D_{\nu\lambda}(k) e^{ikx} \\
&= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \left(-k^2 + m^2 \right) g^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu \right\} D_{\nu\lambda}(k) e^{ikx}
\end{aligned}
$$

一方右辺は

$$
(RHS) = \delta^\mu_\lambda \delta^{(4)}(x) = \delta^\mu_\lambda \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ikx}
$$

よって

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{\left(-k^2+m^2\right) g^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu\right\} D_{\nu\lambda}(k) e^{ikx} = \delta^\mu_\lambda \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ikx}$$

以上より

$$\left\{\left(-k^2+m^2\right) g^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu\right\} D_{\nu\lambda}(k) = \delta^\mu_\lambda = \begin{cases} 1 & (\mu=\lambda) \\ 0 & (\mu\neq\lambda) \end{cases}$$

を得る. ここで Green 関数 $D_{\nu\lambda}$ はすぐに

$$D_{\nu\lambda}(k) = \frac{-g_{\nu\lambda} + k_\nu k_\lambda/m^2}{k^2-m^2}$$

となることがわかる. 実際計算して

$$\begin{aligned}
&\left\{\left(-k^2+m^2\right) g^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu\right\} D_{\nu\lambda}(k) \\
&= \left\{\left(-k^2+m^2\right) g^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu\right\} \frac{-g_{\nu\lambda} + k_\nu k_\lambda/m^2}{k^2-m^2} \\
&= -g^{\mu\nu}\left(-g_{\nu\lambda} + k_\nu k_\lambda/m^2\right) + k^\mu k^\nu \frac{\left(-g_{\nu\lambda} + k_\nu k_\lambda/m^2\right)}{k^2-m^2} \\
&= \delta^\mu_\lambda - g^{\mu\nu} k_\nu k_\lambda/m^2 + k^\mu k^\nu \frac{\left(-g_{\nu\lambda} + k_\nu k_\lambda/m^2\right)}{k^2-m^2} \\
&= \delta^\mu_\lambda + \frac{-k^\mu k_\lambda\left(k^2-m^2\right) - m^2 k^\mu k_\lambda + k^2 k^\mu k_\lambda}{m^2\left(k^2-m^2\right)} \\
&= \delta^\mu_\lambda + \frac{-k^2 k^\mu k_\lambda + m^2 k^\mu k_\lambda - m^2 k^\mu k_\lambda + k^2 k^\mu k_\lambda}{m^2\left(k^2-m^2\right)} \\
&= \delta^\mu_\lambda
\end{aligned}$$

以上にて示された. これがフォトンのプロパゲーターであり、よって W は

$$\begin{aligned}
W(J) &= -\frac{1}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} J^\mu(k)^* \frac{-g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu/m^2}{k^2-m^2+i\varepsilon} J^\nu(k) \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} J^\mu(k)^* \frac{1}{k^2-m^2+i\varepsilon} J_\mu(k)
\end{aligned}$$

と書ける. ただし $J(k)$ は Fourier 逆変換 $J^\mu(k) \equiv \int d^4x e^{-ikx} J^\mu(x)$. により定義される. また上から下の式への変形にあたってカレント保存則を適用した.

問

$$\partial^2 e^{ik(x-y)} = -k^\mu k_\mu e^{ik(x-y)}$$

$$\partial^\mu \partial^\nu e^{ikx} = -k_\mu k_\nu e^{ikx}$$

を示せ.

ここで前回自由場において局在する同符号の 2 点粒子間に働く力は引力であった.

$$W(J) = -\frac{1}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} J(k)^* \frac{1}{k^2-m^2+i\varepsilon} J(k)$$

それは J が二つの同符号である δ 関数の線型結合として、この積分を評価した際エネルギーが

$$E = -\frac{e^{-mr}}{4\pi r} < 0 \qquad \text{前回の自由場のエネルギー}$$

のように $-$ となることに起因する. 一方、今回 $\mu = 0$(電荷密度の項) に注目すると、符号はこの場合の逆であるから、つまり $E > 0$ であるから、斥力となることがわかる. この事実は我々が認識している事実と矛盾なく受け入れられる結果である.

3 Maxwell と Einstein

これまでに求めた massive-スピン 0、massive-スピン 1 に加えて、これから求めるスピン 2 のプロパゲーターは以下である.

$$\begin{aligned}
D(k) &= \frac{1}{k^2 - m^2} \\
D_{\nu\lambda}(k) &= \frac{-G_{\nu\lambda}}{k^2 - m^2} \\
D_{\mu\nu,\lambda\sigma}(k) &= \frac{(G_{\mu\nu}G_{\nu\sigma} + G_{\mu\sigma}G_{\nu\lambda}) - \frac{2}{3}G_{\mu\lambda}G_{\lambda\sigma}}{k^2 - m^2}
\end{aligned}$$

ただし

$$G_{\nu\mu} \equiv g_{\nu\mu} - \frac{k_\nu k_\mu}{m^2}$$

としている.(これは明らかに対称テンソルである.) ここでは $G_{\nu\mu}$ の物理的な意味について考察していきたい.

3.1 スピン 1 の場合

スピン 1 である場合、スピン自由度は $2 \cdot 1 + 1 = 3$ である. よって任意のスピンは適当な線型独立である 3 つの基底をもってして表され、今、その基底を以下に定義する.

$$\begin{pmatrix} k^\mu \\ \varepsilon_\mu^{(1)} \\ \varepsilon_\mu^{(2)} \\ \varepsilon_\mu^{(3)} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} m & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

これらは明らかに線型独立である上、直交基底でもある. さらに $k^i = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$ よりこの系は静止系であるとしている. また

$$k^\mu \varepsilon_\mu^{(a)} = 0$$

であることも容易にわかる.

相対論の簡単な復習

4 元運動量は

$$p^{\mu} \equiv (E/c, p^1, p^2, p^3)$$
$$= \left(mc\gamma, m\gamma v^1, m\gamma v^2, m\gamma v^3\right).$$

であった.4 元内積の両辺を比べることにて、分散関係式

$$E^2 = m^2c^4 + c^2\boldsymbol{P}^2$$

を得る. 以下の関係式

$$E = \hbar\omega \to \omega \quad (\hbar \to 1)$$
$$\vec{p} = \hbar\vec{k} \to \vec{k} \quad (\hbar \to 1).$$

と $c = 1$ と取ることにていつでも

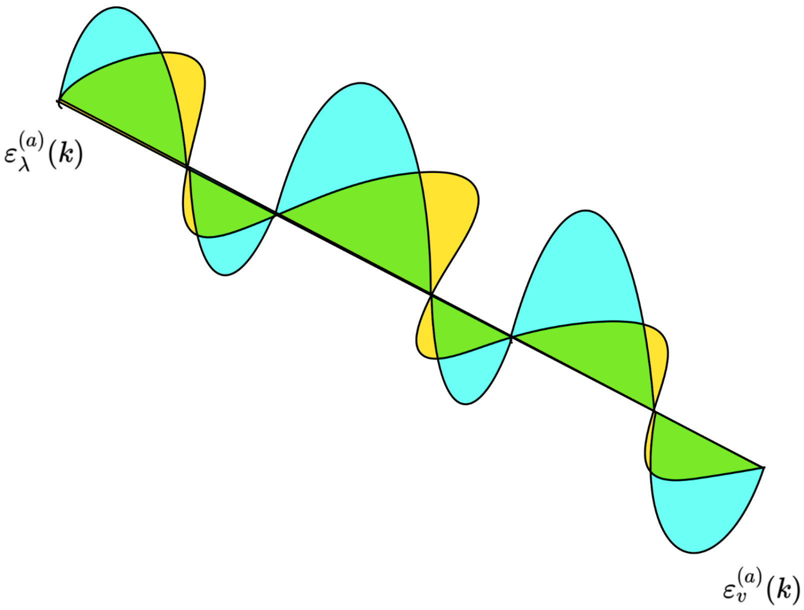
$$\begin{cases} \omega^2 = m^2 + \vec{k}^2 \\ E^2 = m^2 + \vec{k}^2 \end{cases}$$

と変形できるように慣れておこう. 静止系であるということは $\vec{p} = \vec{k} = 0$. すなわち

$$k^0 = E = m$$

である.

上で定義した $\varepsilon_{\mu}^{(a)}$ は偏極ベクトル (polarization vector) と呼ばれている.



実はこれは振幅を表しており、運動量 k、偏極 a をもつ粒子が湧き出しで作られる振幅は $\varepsilon_{\lambda}^{(a)}(k)$ に比例し、

吸い込みで作られる振幅は $\varepsilon_\nu^{(a)}(k)$ に比例する. 実はこれらの振幅のテンソル積が

$$\sum_a \varepsilon_\nu^{(a)}(k)\varepsilon_\lambda^{(a)}(k) = -G_{\nu\lambda}(k)$$

を表している.Zee 先生の本にはこの 2 階テンソルはローレンツ不変性より $g_{\mu\nu}, k_\mu k_\nu$ の線型結合で書けると記載がある.

問題

ローレンツ不変性より

$$\sum_a \varepsilon_\nu^{(a)}(k)\varepsilon_\lambda^{(a)}(k) = Ag_{\nu\lambda} + Bk_\nu k_\lambda$$

と書けることを示せ.(次のページで考察を行う.)

もしこの線型結合が示せれば左から $\varepsilon^{\nu(i)}$ を書けることにて左辺は

$$\begin{aligned}(LHS) &= \varepsilon^{\nu(i)} \sum_a \varepsilon_\nu^{(a)}\varepsilon_\lambda^{(a)} \\ &= -\varepsilon_\lambda^{(i)}\end{aligned}$$

一方右辺は

$$\begin{aligned}(RHS) &= \varepsilon^{\nu(i)}\left(Ag_{\nu\lambda} + Bk_\nu k_\lambda\right) \\ &= A\varepsilon_\lambda^{(i)}\end{aligned}$$

であることから、$A = -1$. 今度は k^ν をかけて

$$\begin{aligned}(LHS) &= k^\nu \sum_a \varepsilon_\nu^{(a)}\varepsilon_\lambda^{(a)} \\ &= 0\end{aligned}$$

一方右辺は

$$\begin{aligned}(RHS) &= k^\nu\left(-g_{\nu\lambda} + Bk_\nu k_\lambda\right) \\ &= -k_\lambda + Bk^2 k_\lambda \\ &= k_\lambda\left(-1 + k^2 B\right)\end{aligned}$$

よって

$$B = \frac{1}{k^2}$$

以上より

$$\sum_a \varepsilon_\nu^{(a)}\varepsilon_\lambda^{(a)} = -\left(g_{\nu\lambda} - \frac{k_\nu k_\lambda}{k^2}\right).$$

となり、ここで静止系であるとすれば $k^2 = m^2$ となるから

$$\sum_a \varepsilon_\nu^{(a)}\varepsilon_\lambda^{(a)} = -\left(g_{\nu\lambda} - \frac{k_\nu k_\lambda}{m^2}\right) = -G_{\nu\lambda}(k)$$

を示すことができた.

それではローレンツ普遍性によって,k が一般の場合に、上のような線型結合で書けるのか考察を行う．今一般の k の場合を考えているから基底の行列を

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} k^0 & k^1 & k^2 & k^3 \\ \varepsilon_0^{(1)} & \varepsilon_1^{(1)} & \varepsilon_2^{(1)} & \varepsilon_3^{(1)} \\ \varepsilon_0^{(2)} & \varepsilon_1^{(2)} & \varepsilon_2^{(2)} & \varepsilon_3^{(2)} \\ \varepsilon_0^{(3)} & \varepsilon_1^{(3)} & \varepsilon_2^{(3)} & \varepsilon_3^{(3)} \end{pmatrix}$$

のように定義したい. まずローレンツ普遍性より偏極ベクトルと運動量ベクトルの 4 元内積はそれぞれ

$$\begin{cases} k^\mu k_\mu = m^2 \\ \varepsilon^{(1)\mu}\varepsilon_\mu^{(1)} = -1 \\ \varepsilon^{(2)\mu}\varepsilon_\mu^{(2)} = -1 \\ \varepsilon^{(3)\mu}\varepsilon_\mu^{(3)} = -1 \end{cases}$$

である. また直交性より

$$\varepsilon^{(i)\mu}\varepsilon_\mu^{(j)} = -\delta_{ij}$$

が成立する. これらは (当たり前であるが) 以下のように書き直せる.

$$\begin{pmatrix} k^0 & k^1 & k^2 & k^3 \\ \varepsilon_0^{(1)} & \varepsilon_1^{(1)} & \varepsilon_2^{(1)} & \varepsilon_3^{(1)} \\ \varepsilon_0^{(2)} & \varepsilon_1^{(2)} & \varepsilon_2^{(2)} & \varepsilon_3^{(2)} \\ \varepsilon_0^{(3)} & \varepsilon_1^{(3)} & \varepsilon_2^{(3)} & \varepsilon_3^{(3)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k^0 & \varepsilon_0^{(1)} & \varepsilon_0^{(2)} & \varepsilon_0^{(3)} \\ k^1 & \varepsilon_1^{(1)} & \varepsilon_1^{(2)} & \varepsilon_1^{(3)} \\ k^2 & \varepsilon_2^{(1)} & \varepsilon_2^{(2)} & \varepsilon_2^{(3)} \\ k^3 & \varepsilon_3^{(1)} & \varepsilon_3^{(2)} & \varepsilon_3^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^2 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

これはすなわち

$$(\mathrm{LHS}) = A^{i\nu}A^{j\mu}g_{\nu\mu} = A^{i\nu}A^{j}{}_{\nu}$$

なのであるが、右辺が対称行列であるから転置をとっても等しく

$$= A^{\nu i}A_{\nu}{}^{j}$$

となる．これは i, j 列の 4 元内積, つまり

$$= \varepsilon_i^{(0)}\varepsilon_j^{(0)} - \sum_a \varepsilon_i^{(a)}\varepsilon_j^{(a)}.$$
$$= k^i k^j - \sum_a \varepsilon_i^{(a)}\varepsilon_j^{(a)}$$

を意味する. この左辺と右辺より

$$\sum_a \varepsilon_i^{(a)}\varepsilon_j^{(a)} = k_i k_j - \begin{pmatrix} m^2 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

つまり

$$= -g_{ij} + k_i k_j + \begin{pmatrix} -m^2+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(あれ...?). 以上少しお釣りが来てしまったが、それらしく求まった.

$\varepsilon_i^{(a)}$ を考えることでスピン 1 の場合のプロパゲータを求められることが確からしいことがわかった.

3.2　スピン 2 の場合

スピン 2 の自由度は $2 \cdot 2 + 1 = 5$ であった. つまり 5 次元の線型表現が存在するということである. 上の場合と同様に偏極テンソル $\varepsilon(a)_{\mu\nu}(a = 1, 2, ..., 5)$ を用意する.(このテンソルは対称テンソルである.)

このテンソルは 4×4 行列であるから行列の要素は合計 16 個存在する. 対称行列である条件のもと、この行列要素の自由度は $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ である. まどろっこしいかもしれないが以下行列の $\cdot$ の部分が決定すれば $*$ の部分が勝手に決まるので、自由度は $\cdot$ の数だけ存在するという意味である.

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ * & \cdot & \cdot & \cdot \\ * & * & \cdot & \cdot \\ * & * & * & \cdot \end{pmatrix}$$

ここでスピン 2 の自由度は 5 であったから、いくつか束縛条件をつけてこの行列の自由度を下げたい. そのために以下の条件を付加しよう.

(i) 運動量ベクトルとの直交条件

$$k^{\mu}\varepsilon^{(a)}_{\mu v} = 0$$

(ii) トレースが 0 となる条件

$$g^{\mu\nu}\varepsilon^{(a)}_{\mu\nu} = 0$$

みてわかるように条件 (i) より 4 個の方程式が、(ii) より 1 個の方程式が作れることになるため、これらを課したあとの行列の自由度は

$$10 - (4 + 1) = 5$$

となり、これでスピン 2 の偏極ベクトルを構成する準備が整ったと言える.

問題

スピン 1 と同じプロセスで以下

$$D_{\mu\nu,\lambda\sigma}(k) = \frac{(G_{\mu\nu}G_{\nu\sigma} + G_{\mu\sigma}G_{\nu\lambda}) - \frac{2}{3}G_{\mu\lambda}G_{\lambda\sigma}}{k^2 - m^2}$$

を求めよ.

(メモ) 実は $N \times N$ 行列はいつも同じ方法 (対称行列と反対称行列へ分解) で以下のように直和分解ができる.

$$N \otimes N = \left[\frac{1}{2}N(N + 1) - 1\right] \oplus 1 \oplus \left[\frac{1}{2}N(N - 1)\right]$$

特にこの $\left[\frac{1}{2}N(N + 1) - 1\right]$ の次元をもつ行列はトレースレスであり、具体的な例として

$$SO(3) = 5 \oplus 1 \oplus 3(\cong U(2))$$

があり、この 5 次元がちょうどトレースレスの空間となる.

さて、スピン 2 のプロパゲータが求まったとして確率振幅を求めるために $W(J)$ を計算しよう. その前にいくつか準備を行う.

エネルギー運動量テンソル

エネルギー運動量テンソルは以下で定義されるものであった.

$$(T^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} w & S_x & S_y & S_z \\ S_x & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ S_y & T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ S_z & T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{pmatrix}$$

ただし

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{B}^2\right) \\ T^{ij} &= -\left[E^iE^j + B^iB^j - \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{B}^2\right)\delta^{ij}\right] \\ S^k &= [\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}]^k \end{aligned}$$

である. この定義より明らかに $(T^{\mu\nu})$ は対称テンソルである. とくに T^{00} はエネルギー密度と呼ばれている. フォトンの場合と同様にゲージ対称性を避けるためグラビトンにも質量があると仮定する.W は

$$W(T) = -\frac{1}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} T^{\mu\nu}(k)^* \frac{(G_{\mu\lambda}G_{\nu\sigma} + G_{\mu\sigma}G_{\nu\lambda}) - \frac{2}{3}G_{\mu\nu}G_{\lambda\sigma}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} T^{\lambda\sigma}(k).$$

これまでと同様にカレントの保存 $\partial_\mu T^{\mu\nu}(x) = 0.$ が成立しているとしてよい.G_{ij} は

$$G_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{m^2}$$

と定義されていたから、被積分関数の分子はどの項に対しても

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu}(k)^* G_{\mu\lambda} T^{\lambda\sigma}(k) &= (T^{\mu\nu})^* \left(g_{\mu\lambda} - \frac{k_\mu k_\lambda}{m^2}\right) T^{\lambda\sigma} \\ &= T^{\mu\nu}(k)^* g_{\mu\lambda} T^{\lambda\sigma}(k) \end{aligned}$$

のように k が消えるように計算される. エネルギー密度の項を計算するために $\mu = \nu = \lambda = \sigma = 0$ の積分をみると

$$-\frac{1}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} T^{00}(k)^* \frac{1 + 1 - \frac{2}{3}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} T^{00}(k)$$

と計算され、結果エネルギー $E < 0$ であることになり、引力が発生する. 無事に重力を示すことができた.

一旦の結論

以上においてスピン 0 の粒子の交換 (同符号) で引力, スピン 1 においては斥力、2 においては引力を生み出す仕組みが大まかに説明された. それぞれがハドロンの強い相互作用、電磁気的相互作用、重力の相互作用によって実現されている.

上のスピン 1 の例としてフォトンを扱ったが、実際フォトンは静止系では存在できず (massless)、スピン自

由度は 3 から 2 へ縮退する. すなわちこのスピンを記述する群は実際は $SO(3)$ ではなく、$SO(2)$ の 2 次元平面の回転としてである. この事実はフォトンは進行方向に垂直な方向にしか偏光がないことと矛盾なく説明される.

4 A baby problem

これまでのセクションではモードが互いに相互作用しない場、つまり自由場を扱ってきた. しかし実際それらは相互作用しあい非線型なモデルとなる. このセクションではその中でも簡単である以下の確率振幅について議論を行いたい.

$$Z(J)=\int D\varphi e^{i\int d^4x\left\{\frac{1}{2}\left[(\partial\varphi)^2-m^2\varphi^2\right]-\frac{\lambda}{4!}\varphi^4+J\varphi\right\}}$$

そのために以下の積分の評価することから始めたい.

$$Z(J)=\int_{-\infty}^{+\infty}dqe^{-\frac{1}{2}m^2q^2-\frac{\lambda}{4!}q^4+Jq}$$

この積分は 1/4! の部分を級数表示にし

$$\begin{aligned}Z(J)&=\left(\int_{-\infty}^{\infty}dqe^{-\frac{m^2}{2}q^2+Jq}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda q^4}{4!}\right)^n(-1)^n\right)\\&=\left(\int_{-\infty}^{\infty}dqe^{-\frac{m^2}{2}q^2+J\cdot q}\right)\left(1-\frac{\lambda q^4}{4!}+\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda q^4}{4!}\right)^2-\cdots\right)\end{aligned}$$

となる. ここで以前示したように *Gauss* 積分を適当に微分することで

$$\frac{d^{4n}}{dJ^{4n}}\int_{-\infty}^{\infty}dqe^{-\frac{m^2q^2}{2}+Jq}=\int_{-\infty}^{\infty}dqq^{4n}e^{-\frac{m^2q^2}{2}+Jq}$$

とできることを利用する. これより上の積分は前に微分をつけた形に変形でき

$$=\left(1-\frac{\lambda}{4!}\frac{d^4}{dJ^4}+\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{4!}\right)^2\frac{d^8}{dJ^8}-\cdots\right)\int_{-\infty}^{\infty}dqe^{-\frac{m^2q^2}{2}+Jq}$$

今 Gauss 積分のいつもの式

$$\int_{-\infty}^{\infty}dxe^{-\left(ax^2+bx+c\right)}=e^{\frac{b^2}{4a}-c}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

を適用することにて

$$\text{右の積分}=\int_{-\infty}^{\infty}dqe^{-\frac{m^2q^2}{2}+Jq}=\frac{\sqrt{2\pi}}{m}\cdot e^{\frac{J^2}{2m^2}}$$

と書けるから

$$Z(J)=\frac{\sqrt{2\pi}}{m}e^{-\frac{\lambda}{4!}\frac{d^4}{dJ^4}}e^{\frac{J^2}{2m^2}}$$

とシンプルに描き直せる. 今 $Z(\lambda=0,J=0)=Z(0,0)$ と定義して正規化された分配関数を

$$\tilde{Z}\equiv Z/Z(0,0)=e^{-\frac{\lambda}{4!}\frac{d^4}{dJ^4}}e^{\frac{J^2}{2m^2}}$$

と定義する. 改めて

$$\widetilde{Z} = \left(1 - \frac{\lambda}{4!} \cdot \frac{d^4}{dJ^4} + \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{4!}\right)^2 \frac{d^8}{dJ^8} - \cdots\right)\left(1 + \frac{J^2}{2m^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{J^2}{2m^2}\right)^2 + \cdots\right)$$

である.λ^μ, J^ν に対して μ, ν を決定すれば、その項の係数が一意的に決定し例えば $(\mu, \nu) = (2, 4)$ のとき

$$\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{4!}\right)^2 \frac{d^8}{dJ^8}\right) \cdot \left(\frac{1}{6!}\frac{J^{12}}{(2m^2)^6}\right) = \frac{12!}{2^7 \cdot (4!)^3 \cdot 6!}\frac{\lambda^2}{m^{12}}J^4$$