Dirac field and Wick's theorem of Grassmann number

Misaki Ohta,University of the Ryukyus *

January 20, 2023

Abstract

Grassmann number を用いたプロパゲーターを計算するため、初等的な Wick の定理の考察にはじめ、Grassmann number の Wick の定理へ拡張を行う.

1 Introduction

2 Path Integral

3 Generalization of Gaussian integrals

Gaussian Integrals

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\left(ax^2+bx+c\right)} = \exp\left[\frac{b^2}{4a} - c\right]\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \ldots dx_N e^{-\frac{1}{2}xAx+Jx} = \left\{\frac{(2\pi)^N}{\det A}\right\}^{1/2} e^{\frac{1}{2}JA^{-1}J}$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \ldots dx_N e^{(i/2)xAx+iJx} = \left\{\frac{(2\pi i)^N}{\det A}\right\}^{1/2} e^{-(i/2)JA^{-1}J}$$

ただし 2,3 行目の x, J はベクトル,A は対称行列である. つまり ${}^tA = A$.

(Proof)
他の全ては 2 番目の適当な変形でえることができるので、2 番目を示す. まず平方完成

$$\frac{1}{2}xAx + xJ = \frac{1}{2}\left(x + JA^{-1}\right)A\left(x + A^{-1}J\right) - \frac{1}{2}JA^{-1}J$$

を行い (上は $\frac{1}{2}{}^txAx + {}^txJ = \frac{1}{2}{}^t\left(x + A^{-1}J\right)A\left(x + A^{-1}J\right) - \frac{1}{2}{}^tJA^{-1}J$ という意味であるが転置は略記している.) その後変数変換 $x \to x + A^{-1}J$ をしてヤコビヤンは 1 であるから

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \cdots dx_N e^{\frac{1}{2}xAx+Jx} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \cdots dx_N e^{\frac{1}{2}xAx-\frac{1}{2}JA^{-1}J}$$

と変形される. 次に対称行列 A は直交行列 P を用いて対角化 $Q = P^{-1}AP$ とできることを思いだす. $e^{\frac{1}{2}xAx} = e^{\frac{1}{2}{}^t(Px)PAP^{-1}(Px)}$ として直交変換 $x \to Px = y$ をすれば、直交行列は $\det(P) = 1$ であるからヤコビヤンも 1 であり (直交行列は ${}^tP = P^{-1}$ を満たす.)、対角行列 $Q = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N)$ として

$$= e^{-\frac{1}{2}JA^{-1}J}\int_{-\infty}^{+\infty} dy_1 \cdots dy_N e^{\frac{1}{2}yQy}$$
$$= e^{-\frac{1}{2}JA^{-1}J}\int_{-\infty}^{+\infty} dy_1 \cdots dy_N e^{\frac{1}{2}\lambda_i y_i^2}$$

*Department of physics, Email: e193225@eve.u-ryukyu.ac.jp / ootamisaki36@gmail.com

これより Gauss 積分を y_i 事に行えるようになり

$$= e^{-\frac{1}{2}JA^{-1}J} \prod_{i=1}^{N} \sqrt{\frac{-2\pi}{\lambda_i}} = \left\{ \frac{(-2\pi)^N}{\det A} \right\}^{1/2} e^{-\frac{1}{2}JA^{-1}J}$$

ただし途中の変形で $\det(Q) = \det\left(P^{-1}AP\right) = \det(A) = \prod_{i=1}^{N} \lambda_i$ を用いた. 以上にて

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \cdots dx_N e^{\frac{1}{2}xAx + Jx} \left\{ \frac{(-2\pi)^N}{\det A} \right\}^{1/2} e^{-\frac{1}{2}JA^{-1}J}$$

が示されて、$A \to -A$ として表題を得る.(証明終)

4 Generalized Gauss integrals for two-variable functions

A を対称行列とする. このとき

Gaussian integrals

Denote $m, m' \in \mathbb{Z}$、${}^tA = A$, then

$$\int dxdy e^{xAy + J_1x + J_2y} = \frac{(\pi)^n e^{n\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi i}}{2^n \det A} e^{-J_2A^{-1}J_1}$$
$$\int dxdy e^{-xAy + J_1x + J_2y} = \frac{(\pi)^n e^{n\left(m'+\frac{1}{2}\right)\pi i}}{2^n \det A} e^{J_2A^{-1}J_1}$$

(Proof)
A が対称行列であるとき

$${}^t\left(x + A^{-1}J_2\right) A \left(y + A^{-1}J_1\right) - {}^tJ_2A^{-1}J_1 = {}^txAy + {}^tJ_1x + {}^tJ_2y$$

と書ける. ここで $x \to x + A^{-1}J_2, y \to A^{-1}J_1$ として

$$\int dxdy e^{xAy + J_1x + J_2y} = \int dxdy e^{xAy - J_2A^{-1}J_1}$$

を得る. 今線型変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

にて

$$\begin{aligned} &= \frac{e^{-J_2A^{-1}J_1}}{2^n} \int dxdy e^{(x-y)A(x+y)} \\ &= \frac{e^{-J_2A^{-1}J_1}}{2^n} \left(\int dx e^{xAx} \right) \left(\int dy e^{-yAy} \right) \end{aligned}$$

となる. 今 Gauss 積分

$$\int dx e^{-\frac{1}{2}xAx + Jx} = \left\{ \frac{(2\pi)^n}{\det A} \right\}^{1/2} e^{\frac{1}{2}JA^{-1}J}$$

に対して $J = 0, A \to 2A, -2A$ として

$$\int dx e^{xAx} = \left\{ \frac{(-\pi)^n}{\det A} \right\}^{1/2}$$
$$\int dx e^{-xAx} = \left\{ \frac{\pi^n}{\det A} \right\}^{1/2}$$

であるから

$$\int dxdye^{xAy+J_1x+J_2y}=\frac{(\pi)^n e^{n\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi}}{2^n\det A}e^{-J_2A^{-1}J_1}$$

$$\int dxdye^{-xAy+J_1x+J_2y}=\frac{(\pi)^n e^{n\left(m'+\frac{1}{2}\right)\pi i}}{2^n\det A}e^{J_2A^{-1}J_1}$$

ただし $(-1)^{1/2}=e^{\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi i}$ であって $m,m'\in\mathbb{Z}$(Q.E.D)

System

$$\int dxdye^{\frac{1}{2}xAy}=\frac{(i\pi)^n}{\det A}$$

は A が正則であれば成立する.

(Proof)
変数変換 $y\to\frac{1}{2}Ay$ にて

$$\int dxdye^{\frac{1}{2}xAy}=\frac{2^n}{\det A}\int dxdye^{xy}$$

ここで変数変換

$$\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}$$

にて

$$=\frac{1}{\det A}\int dxdye^{x^2-y^2}=\frac{1}{\det A}\left(\int dxe^{x^2}\right)\left(\int dye^{-y^2}\right)$$

ここで $x\to xe^{(m+1/2)\pi i}$ として

$$=\frac{e^{-n(m+1/2)\pi i}}{\det A}\left(\int dxe^{-x^2}\right)^2=\frac{e^{-n(m+1/2)\pi i}}{\det A}\prod_{\nu=1}^{2n}\int dx_\nu e^{-x_\nu^2}$$

よって

$$=\frac{e^{-n(m+1/2)\pi i}\pi^n}{\det A}\xrightarrow{m=-1}\frac{(\pi i)^n}{\det A}$$

が言える. ここで重要なことは一般的に $m=1$ として $\frac{(-\pi i)^n}{\det A}$ も結果に含まれるということである.(Q.E.D)

5 Grassmann numbers and their properties

スピノール場のためにグラスマン数を定義する. η,ξ がグラスマン数とは

$$\eta\xi=-\xi\eta,\quad \eta^2=\xi^2=0$$

を満たすような代数であることである. またこれら積分は

$$\begin{cases}\int d\eta=0\\ \int d\eta\eta=1\end{cases}$$

なる性質をもっており、これらゆえさまざまな計算が簡潔に計算されていく. スピノール場の生成関数は

$$\begin{aligned}Z&=\int D\psi D\bar{\psi}e^{i\int d^4x\bar{\psi}(i\partial\!\!\!/-m+i\varepsilon)\psi}\\&=C'\det(i\ \partial\!\!\!/-m+i\varepsilon)\\&=C'e^{\frac{1}{2}\mathrm{trlog}\left(\partial^2+m^2\right)}\end{aligned}$$

であってソースを加えれば

$$Z(\eta,\bar{\eta}) = \int D\psi D\bar{\psi} e^{i\int d^4x[\bar{\psi}(i\partial\!\!\!/-m)\psi+\bar{\eta}\psi+\bar{\psi}\eta]}$$

であるが、これから Wick の定理を考察をするために適宜離散化したモデルを用いることにしていく. 上の $\eta,\bar{\eta},\psi,\bar{\psi}$ は全てグラスマン数である.

6 Discrete models of the Dirac field and Wick's theorem

上で書いた連続的なスピノール場の生成関数を、離散化すると以下のようになる

$$Z(\eta,\bar{\eta}) = \int DqD\bar{q}e^{-2(\bar{q}Aq+\bar{\eta}q+\bar{q}\eta)}$$

対応は

Continuous		Discreate
$i\ \partial\!\!\!/ - m + i\varepsilon$	$\to$	A
ψ	$\to$	q
$\bar{\psi}$	$\to$	$\bar{q}$

であって A は反対称行列である. まず Wick の定理を使うためには、上の生成関数を Gauss 積分によって具体的に求める必要があったことを思い出す.

Lemma

Denote η_i, η'_i, ζ_i in G-number $(i = 1, ..., n)$ and M is $n \times n$ matrix.

$$\eta'_i = M_{ij}\eta_j + \zeta_i$$

then

$$\eta'_1 \cdots \eta'_n = \det(M)\eta_1 \cdots \eta_n + O(\zeta)$$

(Proof)
上は以下のように書き換えられる.

$$\begin{pmatrix} \eta'_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \eta'_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & \dots & M_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ M_{n1} & \dots & M_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \eta_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \zeta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \zeta_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

両辺 ${}^t(1, ..., 1)$ で割り

$$\begin{pmatrix} \eta'_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \eta'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & \dots & M_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ M_{n1} & \dots & M_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \eta_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \zeta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \zeta_n \end{pmatrix}$$

ここで行列式を取るのであるが、行列式を Taylor 展開

$$f(x+\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n}\bigg|_{x=0} \cdot (x+\varepsilon)^n$$

して

$$\eta'_1 \cdots \eta'_n = \det M\eta_1 \cdots \eta_n + O(\zeta)$$

以上にて示された.(Q.E.D)

また以下のようにも示される. 行列の右辺は

$$\begin{pmatrix} M_{11}\eta_1+\zeta_1 & M_{12}\eta_2 & \dots & M_{1n}\eta_n \\ M_{21}\eta_2 & M_{22}\eta_2+\zeta_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ M_{n1}\eta_n & \dots & & M_{nn}\eta_n+\zeta_n \end{pmatrix}$$

であるが、この行列式は

$$\begin{aligned} &= (M_1\eta_1+\zeta_1)(M_{22}\eta_2+\zeta_2)\cdots(M_{nn}\eta_n+\zeta_n)+\cdots \\ &= \det M\eta_1\cdots\eta_n+\zeta_1 M_{22}\eta_2 M_{33}\eta_3\cdots M_{nn}\eta_n+\cdots \end{aligned}$$

となり第 2 項以降は η_i の個数は n 個未満である. これより以下が成立する.

Lemma

Denote ${}^tA=-A$, then and $\eta,\bar\eta$ to be G-number.

$$\eta'_i = M_{ij}\eta_j+\zeta_i$$

then

$$\int d\eta_1\cdots d\eta_n\eta'_1\cdots\eta'_n = \det M$$

and

$$d\eta' = (\det M)^{-1}d\eta$$

(Proof)

$$\begin{aligned} \int d\eta_1\cdots d\eta_n\,(\eta'_1\cdots\eta'_n) &= \int d\eta_1\cdots d\eta_n\,[\det M\eta_1\cdots\eta_n+O(\zeta)] \\ &= \int d\eta_1\cdots d\eta_n \det M\eta_1\cdots\eta_n \\ &= \det M \end{aligned}$$

同様に

$$\int d\eta'\,(\eta'_1\dots\eta'_n) = \det M\int d\eta'\eta_1\dots\eta_n$$

より

$$d\eta' = (\det M)^{-1}d\eta$$

となる.

Lemma

$$\int d\eta d\bar\eta e^{M_{ij}\bar\eta_i\eta_j} = \det M$$

(Proof)

変数変換 $\eta'_i = M_{ij}\eta_j$ として、上の補題より

$$\begin{aligned} &= \det M\int d\eta' d\bar\eta e^{\bar\eta'_j\eta_j} \\ &= \det M\int d\eta' d\bar\eta\left(1+\bar\eta'_j\eta_j+\cdots\right) \\ &= \det M\int d\eta' d\bar\eta\bar\eta\eta \\ &= \det M \end{aligned}$$

以上にて示された.(Q.E.D)

System

$$\int d\eta d\bar{\eta} e^{-\bar{\eta}A\eta} = (-1)^n \det A$$

この系を用いて以下を得る.

Prop

$$\int DqD\bar{q} e^{-(\bar{q}Aq+\bar{\eta}q+\bar{q}\eta)} = (-1)^n (\det A) e^{\bar{\eta}A^{-1}\eta}$$

(Proof)
平方完成

$$\bar{q}Aq + \bar{\eta}q + \bar{q}\eta = \left(\bar{q} + \bar{\eta}A^{-1}\right) A \left(q + A^{-1}\eta\right) - \bar{\eta}A^{-1}\eta$$

ののちに $q \to q + A^{-1}\eta, \bar{q} \to \bar{q} + A^{-1}\bar{\eta}$ なるシフトを行う. これより

$$\begin{aligned}\int DqD\bar{q} e^{-(\bar{q}Aq+\bar{\eta}q+\bar{q}\eta)} &= \int DqD\bar{q} e^{-\left(\bar{q}Aq-\bar{\eta}A^{-1}\eta\right)} \\ &= (-1)^n \det A e^{\bar{\eta}A^{-1}\eta}\end{aligned}$$

以上にて示された.(Q.E.D)

References

[1] QFT [A.Zee]