Quantum Field Theory

Misaki Ohta,University of the Ryukyus

2022 年 4 月 5 日

このノートは適宜追記されます.

シュレーディンガー表示とハイゼンベルグ表示について

状態 $|\psi(t)\rangle$ は基準時間 t_0 からの時間発展として

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iH(t-t_0)} |\psi(t_0)\rangle$$

と書けるのであった. これによりある演算子の期待値

$$\langle \hat{A} \rangle \equiv \langle \psi(t)|\hat{A}|\psi(t)\rangle$$

は演算子が ($|\psi\rangle \equiv |\psi(t_0)\rangle$ として) 時間依存するよう改めて定義することが可能である.

$$= \left\langle \psi \left| e^{i\hat{H}(t-t_0)} \hat{A} e^{-i\hat{H}(t-t_0)} \right| \psi \right\rangle$$

さらに簡潔に $\hat{A}(t) \equiv e^{i\hat{H}(t-t_0)} \hat{A} e^{-i\hat{H}(t-t_0)}$ として

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi|\hat{A}(t)|\psi\rangle$$

と書ける.$|\psi(t)\rangle$ で表されるものをシュレーディンガー表示、$|\psi\rangle$ であるものをハイゼンベルグ表示という.

射影演算子と Born の確率規則

固有値 a に対する射影演算子を

$$\hat{\mathcal{P}}(a) \equiv \sum_{l=1}^{m_a} |a,l\rangle\langle a,l|$$

と定義する.l は固有値 a に属する $\hat{A}$ の線形独立な固有ベクトルにわたる.(縮退全体にわたる.). 量子力学では演算子は無限次元のヒルベルト空間上に作用するが、簡単のために有限次元の離散化されたモデルを考える. 物理量はエルミート演算子であるから、エルミート行列を例に挙げる. 例えば以下の 4 次元空間上に作用する行列

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} & 1 & & \\ 1 & & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

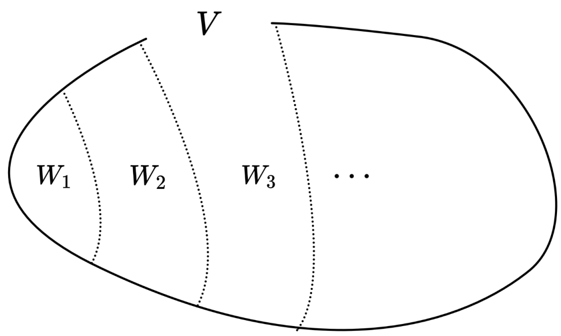
これは明らかにエルミート行列である. この固有値方程式 $\hat{A}x = \lambda x$ を解くことにより

$$\hat{A}' = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

と対角化されるが、これはつまりエルミート行列の作用により不変なベクトル $\hat{A}x = x$ のなす空間が 3 次元であることを意味する. 残りの 1 次元はエルミート行列により符号が反転 (つまり 180 度回転してしまう) ベクトルで $\hat{A}x = -x$ を満たす. すなわちこの行列の作用する線形空間 V として

$$W_1 = \left\{ x \in V \mid \hat{A}x = x \right\}$$
$$W_2 = \left\{ x \in V \mid \hat{A}x = -x \right\}$$

とするならば $\dim(W_1) = 3, \quad \dim(W_2) = 1$ であり $V = W_1 \oplus W_2$ と固有空間に直和分解することができる. 一般にある演算子に対して、その作用する空間が有限であれ無限であれ、また固有値が連続か離散的かにかかわらず、その空間は固有値ごとの空間に分解できる (こんな感じ $V = \bigoplus_{k=1}^{\infty} W_k = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_n \oplus \cdots$). もし縮退がなければ全ての固有空間は一次元であるから、任意の固有値に対して固有ベクトル (つまり状態) が一意的にさだまるし、もし縮退があれば固有値に対する固有空間の基底の線形結合が定まる. つまり重ね合わせが生じる.



固有値でクラス分けされるイメージ。

もとの話に戻して、演算子 $\hat{A}$ の固有ベクトルが完全正規直交基底であるとする. 任意の状態 $|\psi\rangle$ は物理量 A の完全性により

$$|\psi\rangle = \sum_a \sum_{l=1}^{m_a} \psi(a,l)|a,l\rangle \qquad \psi(a,l) \in \mathbb{C}$$

と展開できる. これより $\hat{P}(a)|\psi\rangle$ は

$$\hat{\mathcal{P}}(a)|\psi\rangle = \left(\sum_{l'=1}^{m_a} |a,l'\rangle \langle l',a| \right) \left(\sum_a \sum_{d=1}^{m_a} \psi(a,l)|a,l\rangle \right)$$

正規直交基底であるから

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{l'=1}^{m_a} \sum_{a} \sum_{l=1}^{m_a} \psi(a,l) \left|a,l'\right\rangle \left\langle a,l' \mid a,l\right\rangle \\
&= \sum_{l'=1}^{m_a} \sum_{a} \sum_{l=1}^{m_a} \psi(a,l) \left|a,l'\right\rangle \delta_{ll'} \\
&= \sum_{l=1}^{m_a} \psi(a,l)|a,l\rangle
\end{aligned}
$$

よって

$$
\hat{\mathcal{P}}(a)|\psi\rangle = \sum_{l=1}^{m_a} \psi(a,l)|a,l\rangle
$$

これは、状態 $|\psi\rangle$ の固有値 a に対する固有空間そのものであり、故に射影という名前がついている.

要請-Born の確率規則-(清水明先生の本)

状態 $|\psi\rangle$ について、物理量 A の誤差のない測定を行ったとき、測定値 a_ψ は $\hat{A}$ の固有値どれかであり、どの固有値になるかは一般には測定ごとにランダムにばらつき、a_ψ が区間 $(a-\Delta, a+\Delta]$ に入る確率 $P(a-\Delta, a+\Delta)$ はこの範囲の固有値に属する固有空間への状態ベクトルの射影の長さの 2 乗

$$
P(a-\Delta, a+\Delta] = \|\hat{\mathcal{P}}(a-1, a+\Delta]|\psi\rangle\|^2
$$

で与えられる. (らしい)

連続固有値のとき

$$
\begin{aligned}
P(a-\Delta, a+\Delta] &= \langle\psi|\hat{\mathcal{P}}(a-\Delta, a+\Delta]|\psi\rangle \\
&= \int_{a-\Delta}^{a+\Delta} da' \left\langle \psi \middle| \hat{\mathcal{P}}\left(a'\right) \middle| \psi \right\rangle
\end{aligned}
$$

と書けるが、この被積分関数のことを<u>確率密度</u>という. (積分して確率になるから)

時間発展演算子の性質

時間発展演算子の性質

$$
|\psi(t)\rangle = U\left(t, t_0\right)\left|\psi\left(t_0\right)\right\rangle
$$

は

$$
i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U\left(t, t_0\right) = H(t) U\left(t, t_0\right)
$$

および

$$
U\left(t_2, t_1\right) U\left(t_1, t_0\right) = U\left(t_2, t_0\right)
$$

を満たす.

(証明)

上はシュレーディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = H(t)|\psi(t)\rangle$$

へ $|\psi(t)\rangle = U\left(t,t_0\right)\left|\psi\left(t_0\right)\right\rangle$ を代入し

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U\left(t,t_0\right)\left|\psi\left(t_0\right)\right\rangle = H(t)U\left(t,t_0\right)\left|\psi\left(t_0\right)\right\rangle$$

任意の $\left|\psi\left(t_0\right)\right\rangle$ に対して成立するので

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U\left(t,t_0\right) = H(t)U\left(t,t_0\right)$$

となる．下については

$$\begin{aligned}\left|\psi\left(t_1\right)\right\rangle &= U\left(t_1,t_0\right)\left|\psi\left(t_0\right)\right\rangle\\ \left|\psi\left(t_2\right)\right\rangle &= U\left(t_2,t_1\right)\left|\psi\left(t_1\right)\right\rangle\end{aligned}$$

について $\left|\psi\left(t_1\right)\right\rangle$ を代入し

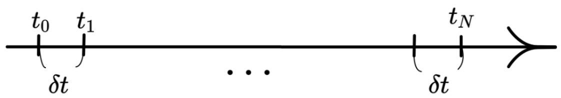
$$\begin{aligned}\left|\psi\left(t_2\right)\right\rangle &= U\left(t_2,t_1\right)U\left(t_1,t_0\right)\left|\psi\left(t_0\right)\right\rangle\\ &= U\left(t_2,t_0\right)\left|\psi\left(t_0\right)\right\rangle\end{aligned}$$

よって

$$U\left(t_2,t_1\right)U\left(t_1,t_0\right) = U\left(t_2,t_0\right)$$

以上にて示された.

命題



$t(=t_N)-t_0$ を N 分割する.$\delta t=(t_N-t_0)/N$ としたとき

$$U\left(t_N,t_0\right) = \left(1-\frac{i}{\hbar}\delta tH\left(t_{N-1}\right)\right)\left(1-\frac{i}{\hbar}\delta tH\left(t_{N-2}\right)\right)\cdots\left(1-\frac{i}{\hbar}\delta tH\left(t_0\right)\right)$$

と書け、特にハミルトニアンが時間依存しない時 $N\to\infty$ において

$$U\left(t,t_0\right) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\left(t-t_0\right)H\right]$$

となる.

(証明)

シュレーディンガー方程式より

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U(t,t) = H(t)U(t,t)$$

であった．$\delta t << 1$ としたとき、偏微分の定義より

$$i\hbar\frac{U(t+\delta t,t)-U(t,t)}{\delta t} = H(t)U(t,t)$$

ここで $U(t,t)=1$ となる恒等演算子であるから、代入して変形し

$$U(t+\delta t,t)=1-\frac{i}{\hbar}\delta tH(t)$$

となる. これより一般に

$$U\left(t_{j+1},t_{j}\right)=1-\frac{i}{\hbar}\delta tH\left(t_{j}\right)$$

と書けるのだから

$$U\left(t_{N},t_{0}\right)=U\left(t_{N},t_{N-1}\right)U\left(t_{N-1},t_{N-2}\right)\ldots U\left(t_{1},t_{0}\right)$$

は

$$=\left(1-\frac{i}{\hbar}\delta tH\left(t_{N-1}\right)\right)\left(1-\frac{i}{\hbar}\delta tH\left(t_{N-2}\right)\right)\cdots\left(1-\frac{i}{\hbar}\delta tH\left(t_{0}\right)\right)$$

となる. 特にハミルトニアンが時間依存しないとき

$$\begin{aligned}U\left(t_{N},t_{0}\right)&=\left(1-\frac{i}{\hbar}\delta tH\right)^{N}\\&=\left(1-\frac{i}{\hbar}\frac{t_{N}-t_{0}}{N}H\right)^{N}\end{aligned}$$

ここで $N\to\infty$ の極限に置いて、ネイピア数の定義から

$$U\left(t,t_{0}\right)=\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\left(t-t_{0}\right)H\right]$$

となる. 以上にて示された.

時間発展演算子のユニタリ性

時間発展演算子はユニタリ演算子、すなわち

$$U^{\dagger}=U^{-1}$$

を満たす.

ハミルトニアンはエルミート演算子、すなわち

$$H^{\dagger}=H$$

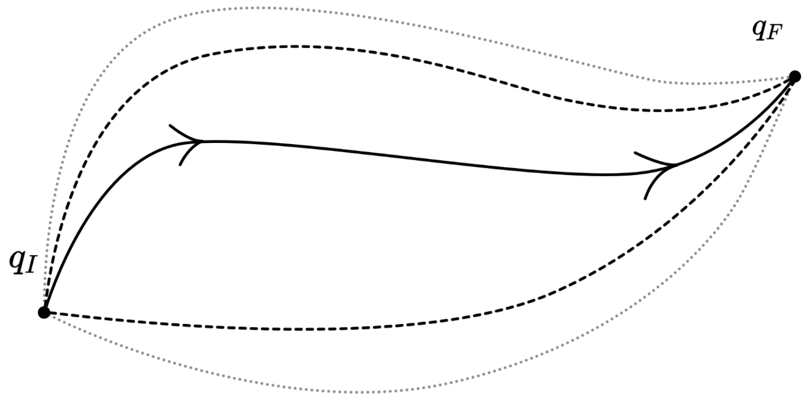
これより U はユニタリ演算子、すなわち $U^{\dagger}=U^{-1}$ であることが以下にて示される. 以下 $U(\Delta t)\equiv U(t+\Delta t,t)$ と定義する.

$$\begin{aligned}U(\Delta t)U^{-1}(\Delta t)&=\left(1-\frac{iH\Delta t}{\hbar}\right)\left(1+\frac{iH^{\dagger}\Delta t}{\hbar}\right)\\&=1+\frac{H^{2}(\Delta t)^{2}}{\hbar^{2}}\\&\approx 1\quad(\because\Delta t\ll 1)\end{aligned}$$

以上にて示された.

Path integral の定義

　とりうるあらゆるパスを考える...



　状態 $|q_I\rangle$ から時間 T の発展により　$|q_F\rangle$ となったとする. この時の確率振幅 Z'(これはグリーン関数とも呼ばれる, グリーン関数は微分演算子を作用するとデルタ関数になるものをいう,) は

$$Z' = \left\langle q_F \left| e^{-iHT} \right| q_I \right\rangle$$

と書ける.(これを二乗したら確率密度となり、確率密度を積分したら確率となる.). ここで時間 T を N 分割する ($\delta t = \frac{T}{N}$) と

$$Z' = \left\langle q_F \mid e^{-iH\delta t} e^{-iH\delta t} \cdots \cdot e^{-iH\delta t} |q_I \right\rangle \quad \cdots (*)$$

ここで位置の完全性より

$$\int dq_i \left| q_i \right\rangle \left\langle q_i \right| = 1$$

復習であるが、$|q_i\rangle$ とは演算子 $\hat{q}$ に対して固有値方程式

$$\hat{q} \left| q_i \right\rangle = q_i \left| q_i \right\rangle$$

を満たすような固有ベクトルである. 縮退がなければ–言い換えると固有値がどれも重複がない–場合に於いて、一つの固有値に対して、一つの固有ベクトルが定まる. 縮退がある場合は、一つの固有値に属する固有空間が上の固有方程式を満たす固有ベクトル全体となる.

ここで完全性とは縮退があるかどうか別として、固有ベクトル $|q_i\rangle$ 全体の貼る空間をもってして任意の状態 $|\psi\rangle$ を書き表せることを意味する. そしてこの固有ベクトル全体はいつも適当な方法で正規化、直交化が可能である (シュミット直交化など).

さて (*) を以下のように考えると $e^{-iH\delta t}$ 同士に 1 が挟まっていると思い込む

$$(*) = \left\langle q_F | e^{-iH\delta t} \times 1 \times e^{-iH\delta t} \times 1 \times \cdots \times 1 \times e^{-H\delta t} \mid q_I \right\rangle$$

この 1 を位置の完全性の式に置き換え (それぞれの積分が別々に行われているので、ダミー添字を区別しよう.)

$$= \langle q_F | \, e^{-iH\delta t} \left(\int dq_{N-1} \, |q_{N-1}\rangle \, \langle q_{N-1}| \right) e^{-iH\delta t} \left(\int dq_{N-2} \, |q_{N-2}\rangle \, \langle q_{k-2}| \right) \cdots e^{-iH\delta t} \left(\int dq_1 |q_1\rangle \, \langle q_1| \right) e^{-iH\delta t} \, |q_I\rangle$$

整理して

$$= \int dq_{N-1} \ldots \int dq_1 \left\langle q_F \left| e^{-iH\delta t} \right| q_{N-1} \right\rangle \left\langle q_{N-1} \left| e^{-iH\delta t} \right| q_{N-2} \right\rangle \cdots \left\langle q_1 \left| e^{-iH\delta t} \right| q_I \right\rangle$$

これよりまとめると確率振幅は

$$\left\langle q_F \left| e^{-iHT} \right| q_I \right\rangle = \left(\prod_{j=1}^{N-1} \int dq_j \right) \left\langle q_F \left| e^{-iH\delta t} \right| q_{N-1} \right\rangle \cdots \left\langle q_1 \left| e^{-iH\delta t} \right| q_I \right\rangle$$

となる. 今 $\hat{H} = \frac{\hat{p}}{2m}$ とした場合を考えてみよう. 運動量演算子の満たす固有値方程式

$$\hat{p}|p\rangle = p|p\rangle$$

と $\hat{q}, \hat{p}$ の交換関係から導かれた関係式

$$\langle q \mid p \rangle = e^{ipq}$$

を思い出す.

$\langle q \mid p \rangle = e^{ipq}$ の導出

位置と運動量演算子の交換関係式

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i$$

両辺から $\langle q|$, $|q'\rangle$ で挟み込み

$$\langle q|[\hat{q}, \hat{p}]|q'\rangle = i\delta\left(q - q'\right)$$

この左辺は固有値方程式より

$$\begin{aligned}(LHS) &= \langle q\,|\hat{q}\hat{p} - \hat{p}\hat{q}|\,q'\rangle \\ &= \left(q - q'\right)\langle q|\hat{p}|q'\rangle\end{aligned}$$

よって

$$\langle q|\hat{p}|q'\rangle = i\frac{\delta\left(q - q'\right)}{q - q'}$$

となる. ここでデルタ関数の公式

$$-\frac{\delta(x)}{x} = \frac{d\delta(x)}{dx}$$

から

$$\begin{aligned}-\frac{\delta\left(q - q'\right)}{q - q'} &= \frac{d\delta\left(q - q'\right)}{d\left(q - q'\right)} \\ &= \frac{d\delta\left(q - q'\right)}{dq}\end{aligned}$$

と書けることより

$$\begin{aligned}\langle q|\hat{p}|q'\rangle &= -i\frac{\partial\delta\left(q - q'\right)}{\partial q} \\ &= -i\frac{\partial}{\partial q}\left\langle q \mid q'\right\rangle\end{aligned}$$

となる. 任意の $|q'\rangle$ に対して成立することから

$$\langle\hat{q}|\hat{p} = -i\frac{\partial}{\partial q}\langle q|$$

今、右から $|p\rangle$ をかけることより

$$p\langle q \mid p\rangle = -i\frac{\partial}{\partial q}\langle q \mid p\rangle$$

を得る.(p の固有値方程式を用いた.) この微分方程式を解くことにて

$$\langle q \mid p\rangle = Ae^{ipq}$$

ここで位置の完全性より

$$\int dq|q\rangle\langle q| = 1$$

両辺 $\langle p|, |p' >$ で挟んで

$$\begin{aligned}\int dq\langle p \mid q\rangle\left\langle q \mid p'\right\rangle &= \left\langle p \mid p'\right\rangle \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dq e^{iq\left(p-p'\right)}\end{aligned}$$

右辺はデルタ関数の定義より定まる. 左辺は

$$(LHS) = |A|^2 \int dq e^{iq\left(-p+p'\right)}$$

となるが $\delta(x) = \delta(-x)$ より

$$|A| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

を得る. 今はこのように $1/\sqrt{2\pi}$ が必要になったが自然単位系を用いずに計算していき、最後に辻褄を合わせることで

$$\langle q \mid p \rangle = e^{ipq}$$

がもとまる.

これにより

$$\left\langle q_{j+1} \left| e^{-iH\delta t} \right| q_j \right\rangle = \left\langle q_{j+1} \left| e^{-i\frac{\hat{p}^2}{2m}\delta t} \right| q_j \right\rangle$$

は運動量の完全性 (位置からのフーリエ変換)

$$\int \frac{dp}{2\pi} |p\rangle\langle p| = 1$$

(この規格化が正しいことは $\langle q''|, |q'\rangle$, で挟み込み δ 関数の積分表示を確かめればよい $\int \frac{dp}{2\pi} \langle q'' \mid p \rangle \langle p \mid q' \rangle = \int \frac{dp}{2\pi} e^{ip\left(q''-q'\right)}$)

上へ左から $e^{-iH\delta t}$ をかけて

$$\int \frac{dp}{2\pi} e^{-iH\delta t} |p\rangle\langle p| = e^{-iH\delta t}$$

さらに両辺 $\langle q_{j+1}|, |q_j\rangle$ ではさみこみ

$$\left\langle q_{j+1} \left| e^{-i\frac{\hat{p}^2}{2m}\delta t} \right| q_j \right\rangle = \int \frac{dp}{2\pi} \left\langle q_{j+1} \left| e^{-i\frac{\hat{p}^2}{2m}\delta t} \right| p \right\rangle \langle p \mid q_j \rangle$$

となる. ここで運動量演算子の固有値方程式より

$$e^{-i\frac{\hat{p}^2}{2m}} |p\rangle = e^{-i\frac{p^2}{2m}} |p\rangle$$

(ハットが外れる.) なぜならば

$$\begin{aligned} e^{\alpha\hat{p}}|p\rangle &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \hat{p}^n\right) |p\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} p^n |p\rangle \\ &= e^{\alpha p}|p\rangle \end{aligned}$$

であるからである.($(\hat{p})^n|p\rangle = p^n|p\rangle$ は数学的帰納法により容易に示される.)

さらに $\langle q \mid p \rangle = e^{ipq}$ であることから

$$\begin{aligned} \langle p \mid q_j \rangle &= \left(\langle q_j \mid p \rangle\right)^\dagger \\ &= e^{-ipq_j} \\ \langle q_{j+1} \mid p \rangle &= e^{ipq_{j+1}} \end{aligned}$$

よって

$$\left\langle q_{j+1}\left|e^{-iH\delta t}\right|q_j\right\rangle=\frac{1}{2\pi}\int dpe^{p^2\left(-\frac{i\delta t}{2m}\right)+p\{i(q_{j+1}-q_j)\}}$$

ここで Gauss 積分を思い出す

Gaussian integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}dxe^{-\left(ax^2+bx+c\right)}=e^{\frac{b^2}{4a}-c}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

上に関して

$$\begin{cases} a=\frac{i\delta t}{2m} \\ b=-i\left(q_{j+1}-q_j\right) \\ c=0 \end{cases}$$

とすることにより

$$\left\langle q_{j+1}\left|e^{-iH\delta t}\right|q_j\right\rangle=\exp\left[\frac{im\left(q_{j+1}-q_j\right)^2}{2\delta t}\right]\sqrt{\frac{-mi}{2\pi\delta t}}$$

となる. これより確率振幅 $Z'=\left\langle q_F\left|e^{-iHT}\right|q_I\right\rangle$ は

$$Z'=\left(\prod_{j=1}^{N-1}\int dq_j\right)\left[e^{\frac{im(q_F-q_{N-1})^2}{2\delta t}}\sqrt{\frac{-mi}{2\pi\delta t}}\right]\times\left[e^{\frac{im(q_{N-1}-q_{N-2})^2}{2\delta t}}\sqrt{\frac{-mi}{2\pi\delta t}}\right]\times\cdots\times\left[e^{\frac{im(q_1-q_I)^2}{2\delta t}}\sqrt{\frac{-mi}{2\pi\delta t}}\right]$$

すなわち

$$Z'=\left(-\frac{im}{2\pi\delta t}\right)^{\frac{N}{2}}\left(\prod_{k=1}^{N-1}\int dq_k\right)e^{i\delta t(m/2)\sum_{j=0}^{N-1}[(q_{j+1}-q_j)/\delta t]^2}$$

今極限 $\delta t\to 0$ を考えると

$$\begin{array}{l}\left(\frac{q_{j+1}-q_j}{\delta t}\right)^2\to\dot{q}^2\quad(\delta t\to 0)\\ \delta t\sum_{j=0}^{N-1}\to\int_0^T dt\quad(\delta t\to 0)\end{array}$$

下のは区分求積法である. そして次を定義する,

定義

$$\int Dq(t):=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{-im}{2\pi dt}\right)^{\frac{N}{2}}\left(\prod_{k=1}^{N-1}\int dq_k\right)$$

これを使って

$$\left\langle q_F\left|e^{-iHT}\right|q_I\right\rangle=\int D_q(t)e^{\frac{mi}{2}\int_0^T dt\dot{q}^2}$$

となる.

問

$H=\hat{p}/2m+V(\hat{q})$ のとき

$$\left\langle q_F\left|e^{-iHT}\right|q_I\right\rangle=\int D_q(t)e^{i\int_0^T dt\left[\frac{1}{2}m\dot{q}^2-V(q)\right]}$$

であることを示せ.

問

自由粒子の場合に具体的に経路積分を行い、確率振幅を計算せよ.

付録

ガウス積分がどう実行されるか.

$$G = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{x^2}{2}}$$

とする．このとき G^2 は

$$\begin{aligned} G^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{x^2}{2}}\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\frac{y^2}{2}}\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dxdy e^{-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)} \end{aligned}$$

である.

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

より全微分は

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dr \\ d\theta \end{bmatrix}$$

である. これは

$$\begin{bmatrix} dx & 0 \\ 0 & dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dr & 0 \\ 0 & d\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

とも書ける．$[1,1]^t$ を右から割って行列式をとれば $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ の性質より (これを準同型という.)

$$dxdy = \left(\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \theta} - \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial y}{\partial r}\right) drd\theta$$

よって

$$dxdy = rdrd\theta$$

また積分区間は $\{x, y \mid -\infty < x, y < \infty\} \to \{r, \theta \mid 0 \leqslant r < \infty, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$ と変更されることにて

$$\begin{aligned} G^2 &= \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-\frac{1}{2}r^2} rdrd\theta \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} re^{-\frac{1}{2}r^2} dr \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} e^{-w} dw \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

よって $G = \sqrt{2\pi}$

wick の定理 (追記予定)

マットレス場 (追記予定)

$$L(\dot{q},q)=\frac{1}{2}m\dot{q}^2-V(q)$$

であったから

$$\left\langle q_F\left|e^{-iHT}\right|q_I\right\rangle=\int D_q(t)e^{i\int_0^T dtL(\dot{q},q)}$$

とかける. ここで e のかたの積分はまさに作用 S

$$S=\int_0^T dtL(\dot{q},q)$$

である.1 粒子の量子に対して真空状態から真空状態 (エネルギーが最低の状態の時間発展) の確率密度を

$$\begin{aligned}Z&\equiv\left\langle 0\left|e^{-iHT}\right|0\right\rangle\\&=\int D_q(t)e^{i\int_0^T dt\left[\frac{1}{2}mq^2-V(q)\right]}\end{aligned}$$

と定義する. 一般に N 個の粒子からなる場合ハミルトニアンは

$$H=\sum_a\frac{1}{2m_a}\hat{p}_a^2+V\left(\hat{q}_1,\cdots,\hat{q}_N\right)$$

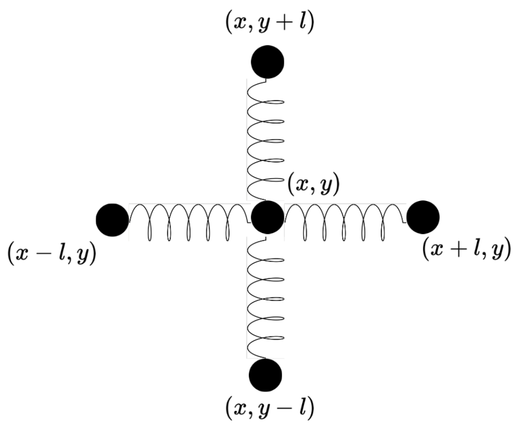
と表される. よって作用は

$$S=\int_0^T dt\left\{\sum_a\frac{1}{2}m_a\dot{q}_a^2-V\left(q_1,\ldots,q_N\right)\right\}$$

今ポテンシャルが

$$V\left(q_1,\ldots,q_N\right)=\sum_{a,b}\frac{1}{2}k_{a,b}\left(q_a-q_b\right)^2+\cdots$$

で表され、最近接粒子間の相互作用のみを考え、それ以外は無視する.2 次元マットレス場 (x,y) の場 $\varphi(t,x,y)$ に対して、その近傍との相互作用は (以下のような、デカルト座標をイメージする.)



このとき十分小さな l に対して

$$\begin{cases} \varphi(t,x\pm l,y)-\varphi(t,x,y)\sim l\frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ \varphi(t,x,y\pm l)-\varphi(t,x,y)\sim l\frac{\partial\varphi}{\partial y} \end{cases}$$

が偏導関数の定義より成立する.(x,y) の場 $\varphi(t,x,y)$ に対して

$$(q_a-q_b)^2\sim l^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+l^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\cdots$$

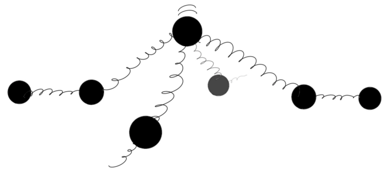
が成立する. これより作用 $S(q)\to S(\varphi)$ は

$$\begin{aligned} S(\varphi) &= \int_0^T dt\int d^2x\mathcal{L}(\varphi) \\ &= \int_0^T dt\int d^2x\frac{1}{2}\{\underbrace{\sigma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2}_{\text{kinetic}}\underbrace{-\varphi\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]}_{\text{potential}}-\cdots \end{aligned}$$

ここで $\varphi\to\varphi/\sqrt{\sigma}, T\to\infty, \rho\to\sigma\iota^2$ に於いて (バネ係数は適当にしていたので、上のように都合よく置き換えが可能である.)

$$\to\int_0^\infty dt\int d^2x\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2-c^2\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]-\cdots\right\}$$

これは被積分関数はまさに Klein – Gordon equation と呼ばれるものである.



Klein – Gordon equation の補足

シュレーディンガー方程式の相対論的な拡張について.

∂^μ を

$$
\begin{aligned}
\partial^\mu &\equiv \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right) \\
&= \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z}\right)
\end{aligned}
$$

と定義する. 量子力学において $\hat{\mathbb{P}} \to -i\hbar\nabla$ であったから、相対論における 4 元運動量を素朴に量子力学へ拡張しようとすると

$$
p^\mu = \left(E/c, p^i\right) \to \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial(ct)}, -i\hbar\nabla\right) \equiv i\hbar\partial^\mu
$$

と安直に発想してみる. 相対論の分散関係式

$$
p^\mu p_\mu - (mc)^2 = 0
$$

へ $p^\mu = i\hbar\partial^\mu$ を代入し、右から ψ を書けると

$$
-\hbar^2\partial^\mu\partial_\mu\psi - (mc)^2\psi = 0
$$

ここで

$$
\partial^\mu\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial(ct)}\right)^2 - \nabla^2
$$

と定義したから、代入して

$$
\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi = 0
$$

を得る. これがクラインゴルドン方程式と呼ばれるものである. 実は ψ を波動関数として扱うと、相対論の分散関係式にて確率がマイナスとなる問題が発生し、破綻する. (ψ も演算子とすることで解決する)
また自由スカラー場ラグランジアン

$$
\mathcal{L}^{\text{free}}_{\text{scalar}} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi\right)\left(\partial^\mu\phi\right) - \frac{1}{2}\mu^2\phi^2
$$

からクラインゴルドン方程式が導かれる. 場のオイラーラグランジュ方程式

$$
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = \partial^\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^\mu\phi\right)}
$$

から

$$
\begin{aligned}
(LHS) &= \frac{\partial}{\partial\phi}\left[\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi\right)\left(\partial^\mu\phi\right) - \frac{1}{2}\mu^2\phi^2\right] \\
&= -\mu^2\phi
\end{aligned}
$$

一方

$$
\begin{aligned}
(RHS) &= \partial^\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^\mu\phi\right)} \\
&= \partial^\mu\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial\left(\partial_\mu\phi\right)\left(\partial^\mu\phi\right)}{\partial\left(\partial^\mu\phi\right)}\right\} \\
&= \partial^\mu\left\{\frac{1}{2}\left(g_{\mu a}\delta^\alpha_\mu\partial^\mu\phi + g_{\mu\alpha}\partial^\alpha\phi\right)\right\} \\
&= \partial^\mu g_{\mu\alpha}\partial^\alpha\phi \\
&= \partial^\mu\partial_\mu\phi
\end{aligned}
$$

よって

$$
\left(\Box - \mu^2\right)\phi = 0
$$

相対論のメモ

$$g_{\mu v}=\begin{pmatrix}-1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$$

Klien Gordon 方程式の保存量

$$I=i\int d\vec{r}\left(\partial^0\phi^*\right)\phi-\phi^*\left(\partial^0\phi\right)$$

について考える. 時間微分をして

$$\begin{aligned}\frac{dI}{dt}&=i\frac{d}{dt}\int dx\left(\partial^0\phi^*\right)\phi-\phi^*\left(\partial^0\phi\right)\\&=i\int dx\left(\partial^0\right)^2\phi^*\phi+\partial^0\phi^*\partial^0\phi-\partial^0\phi^*\partial^0\phi-\phi^*\left(\partial^0\right)^2\phi\\&=i\int dx\left\{\left(\partial^0\right)^2\phi^*\phi-\partial^*\left(\partial^0\right)^2\phi\right\}\end{aligned}$$

ここで Klein-Gordon 方程式は

$$\left[-\left(\partial^0\right)^2+\nabla^2\right]\phi=m^2\phi$$

であって、これより

$$\begin{cases}\left\{\left(\partial^0\right)^2\phi^*\right\}\phi=\left(\nabla^2\phi^*\right)\phi-\left(m^2\phi^*\right)\phi\\\phi^*\left(\partial^0\right)^2\phi=\phi^*\nabla^2\phi-\left(m^2\phi^*\right)\phi\end{cases}$$

が成立する. 上の式へ代入して

$$\begin{aligned}\frac{dI}{dt}&=i\int dx\left[\left(\partial^1\right)^2\phi^*\phi-m^2\phi^*\phi-\phi^*\left(\partial^1\right)^2\phi+m^2\phi^*\phi\right]\\&=i\int dx\left[\left(\partial^1\right)^2\phi^*\phi-\phi^*\left(\partial^1\right)^2\phi\right]\\&=i\int dx\partial^1\left(\partial^1\phi^*\phi-\phi^*\partial^1\phi\right)\end{aligned}$$

となる. ここで最初の式と最後の式について

$$i\int dx\partial^0\left[\partial^0\phi^*\phi-\phi^*\partial^0\phi\right]=i\int dx\partial^1\left[\partial^1\phi^*\phi-\phi^*\partial^1\phi\right]$$

であるが、これは積分区間に依存せず恒等的に成立するから、

$$\partial^0\left(\partial^0\phi^*\phi-\phi^*\partial^0\phi\right)=\partial^1\left(\partial^1\phi\phi^*-\phi^*\partial^1\phi\right)$$

第 2、第 3 成分の拡張は容易であり、これより

$$\partial_\mu J^\mu=0\quad\left(J_\mu\equiv i\left(\partial_\mu\phi^*\phi-\phi^*\partial_\mu\phi\right)\right)$$

となることが示される.