$\mathfrak{o}(8)$ and D_4 Lattice

$\mathfrak{o}(8)$ の Cartan 部分代数は

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & -i\lambda_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i\lambda_3 \\ \hline i\lambda_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i\lambda_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{1}$$

であった. 一方で任意の $X \in \mathfrak{o}(8)$ は 28 個の変数を用いて

$$X = \begin{pmatrix} 0 & a_{01} & a_{02} & a_{03} & a_{04} & a_{05} & a_{06} & a_{07} \\ -a_{01} & 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} \\ -a_{02} & -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} \\ -a_{03} & -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} \\ -a_{04} & -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 & a_{45} & a_{46} & a_{47} \\ -a_{05} & -a_{15} & -a_{25} & -a_{35} & -a_{45} & 0 & a_{56} & a_{57} \\ -a_{06} & -a_{16} & -a_{26} & -a_{36} & -a_{46} & -a_{56} & 0 & a_{67} \\ -a_{07} & -a_{17} & -a_{27} & -a_{37} & -a_{47} & -a_{57} & -a_{67} & 0 \end{pmatrix}$$

とあらわす事ができる. しかしここでは簡単のため以下の同型 Lie 代数の同型を用いて話を進めたい. $\mathfrak{g}_J = \{X \in \mathfrak{gl}(n) | X^T J + JX = 0\}$ に対して $\mathfrak{g}_{\tilde{J}} = \{X \in \mathfrak{gl}(n) | X^T (P^T JP) + (P^T JP)X = 0\}$

$$\phi : \mathfrak{g}_J \to \mathfrak{g}_{\tilde{J}}$$

Lie 代数 $\mathfrak{o}(2m) = \{X \in \mathfrak{gl}(2m) | X^T E_{2m} + E_{2m} X = 0\}$ はいつも以下の直交行列にて Cartan 部分代数が対角化された $\tilde{\mathfrak{o}}(2m)$ への同型

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{array}{c|c} E_m & E_m \\ \hline -iE_m & iE_m \end{array}\right]$$

が存在する. この P を用いることで $P^T E_{2m} P$ は

$$P^T E_{2m} P = \left(\begin{array}{c|c} 0 & E_m \\ \hline E_m & 0 \end{array}\right)$$

となるから

$$X = \left(\begin{array}{c|c} X_{11} & X_{12} \\ \hline X_{21} & X_{22} \end{array}\right)$$

の満たすべき条件は

$$X_{11}^t = -X_{22}$$
$$X_{21}^t = -X_{21}$$
$$X_{12}^t = -X_{12}$$

となることがわかる. これにより与えられる $\mathfrak{g}_{\tilde{J}}$ の元は反対称行列 T_i として

$$\tilde{X} = \left[\begin{array}{c|c} X_{11} & T_1 \\ \hline T_2 & -X_{11}^t \end{array}\right]$$

で与えられることになる. 同型写像変換前とはことなり対角成分をもつことができるので、Cartan 部分代数は

$$
\tilde{H} = \begin{pmatrix}
\lambda_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_3
\end{pmatrix} \tag{2}
$$

と改めて与えられることになる.$\tilde{X}$ は

$$
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
a_{00} & a_{10} & a_{20} & a_{30} & 0 & a_{41} & a_{42} & a_{43} \\
a_{01} & a_{11} & a_{21} & a_{31} & -a_{41} & 0 & a_{52} & a_{53} \\
a_{02} & a_{12} & a_{22} & a_{32} & -a_{42} & -a_{52} & 0 & a_{63} \\
a_{03} & a_{13} & a_{23} & a_{33} & -a_{43} & -a_{53} & -a_{63} & 0 \\
\hline
0 & a_{71} & a_{72} & a_{73} & -a_{00} & -a_{01} & -a_{02} & -a_{03} \\
-a_{71} & 0 & a_{82} & a_{83} & -a_{10} & -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\
-a_{72} & -a_{82} & 0 & a_{93} & -a_{20} & -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \\
-a_{73} & -a_{83} & -a_{93} & 0 & -a_{30} & -a_{31} & -a_{32} & -a_{33}
\end{array}\right)
$$

これより $[\tilde{H}, \tilde{X}] = \mathrm{ad}(\tilde{H})(\tilde{X})$ に対し,$\mathrm{ad}(\tilde{H})$ は $(a_{00}, a_{01}, ..., a_{93})$ へ作用する 28×28 の対角行列として (28 表現という.)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{diag}\,(0, &\lambda_0 - \lambda_1, \lambda_0 - \lambda_2, \lambda_0 - \lambda_3 \\
&- \lambda_0 + \lambda_1, 0, \lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1 - \lambda_3, \\
&- \lambda_0 + \lambda_2, -\lambda_1 + \lambda_2, 0, \lambda_2 - \lambda_3 \\
&- \lambda_0 + \lambda_3, -\lambda_1 + \lambda_3, -\lambda_2 + \lambda_3, 0, \\
&\lambda_0 + \lambda_1, \lambda_0 + \lambda_2, \lambda_0 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2, \\
&\lambda_1 + \lambda_3, \lambda_2 + \lambda_3, -\lambda_0 - \lambda_1, -\lambda_0 - \lambda_2, \\
&-\lambda_0 - \lambda_3, -\lambda_1 - \lambda_2, -\lambda_1 - \lambda_3, -\lambda_2 - \lambda_3)
\end{aligned}
$$

と書ける. これをルートと呼ぶのであった. ゼロルートは Cartan 部分代数の次元の個数だけあり 4 つである. よってルート系 (ノンゼロルート) は $28 - 5 = 24$ 個存在する. つまり $|\Delta| = 24$. ルートは 4 次元、つまり以下の一次結合で表せ

$$
\boldsymbol{\alpha}_i = c_0\lambda_0 + c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + c_3\lambda_3
$$

この係数ベクトル $\boldsymbol{c} = (c_0, c_1, c_2, c_3)$ は以下の格子に属する.

$$
D_4 = \mathrm{span}_{\mathbb{Z}} \begin{pmatrix}
1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 1
\end{pmatrix}
$$

Cartan 行列は

$$
C_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix}
2 & -1 & 0 & 0 \\
-1 & 2 & -1 & -1 \\
0 & -1 & 2 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 2
\end{pmatrix}
$$

ワイル群は単純ルートの鏡映により生成されるのであって、それは

$$
W(D_4) = \left\langle \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & -1 & 0
\end{pmatrix} \right\rangle
$$

位数 192 の群となる.