Calculation Notebook 1

University of the Ryukyus, Misaki Ohta

December 4, 2022

1 Calculation Notebook

縮約の規則

$$
\begin{aligned}
A_{ik} &= g_{il}g_{km}A^{lm} = g_{kl}A_i^l = g_{il}A^l_{.k} \\
A^{ik} &= g^{il}g^{km}A_{lm} = g^{il}A_l^k = g^{kl}A^i_{ll} \\
A_i^k &= g_{il}A^{lk} = g^{kl}A_{il} \\
A^i_{.k} &= g^{il}A_{lk} = g_{kl}A^{il}
\end{aligned}
$$

第一クリストフェル記号

$$
\Gamma_{ijk} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right)
$$

以下の作用の変分を考える.

$$
S = \int dx^4 \sqrt{-g}\mathcal{L}
$$

1.1 計算

これについてまず

$$
\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\lambda}g^{\nu k}\delta g_{\lambda k} \tag{1}
$$

を示したい. まずメトリックの以下の計算は

$$
g^{\mu\nu}g_{\nu\lambda} = \delta^\mu{}_\lambda = \text{ (const)} \tag{2}
$$

となるから変分をとっても定数である.

$$
\begin{aligned}
(LHS) &= (g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu})(g_{\nu\lambda} + \delta g_{\nu\lambda}) \\
&= g^{\mu\nu}g_{\nu\lambda} + g^{\mu\nu}\delta g_{\nu\lambda} + g_{\nu\lambda}\delta g^{\mu\nu} \\
&= \delta^\mu{}_\lambda + g^{\mu\nu}\delta g_{\nu\lambda} + g_{\nu\lambda}\delta g^{\mu\nu} = (RHS)
\end{aligned}
$$

これより

$$
g^{\mu\nu}\delta g_{\nu\lambda} = -g_{\nu\lambda}\delta g^{\mu\nu} \tag{3}
$$

これを変形して

$$
\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\lambda}g^{\nu k}\delta g_{\lambda k}
$$

を得る.

1.2 計算

次に

$$\delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \tag{4}$$

を示す. ただし

$$g \equiv \det(g_{ij}) \,. \tag{5}$$

であって、

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial g^{\mu\nu}} &= -g g_{\mu\nu} \\ \frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} &= g g^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (6)}$$

が成立する. なぜならば g_{ij} の余因子を $(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ とすると (同様に g^{ij} の余因子は $(-1)^{i+j}\Delta^{ij}$ としている.)

$$\frac{(-1)^{i+j}\Delta_{ij}}{\det(g_{ij})} = \frac{(-1)^{i+j}\Delta_{ij}}{g_{ij}(-1)^{i+j}\Delta_{ij}} = \frac{1}{g_{ij}} \tag{7}$$

である一方で

$$g_{ij} g^{jk} = \delta_i{}^k \tag{8}$$

すなわち、g_{ij} の逆行列は g^{ij} であるから

$$\frac{(-1)^{i+j}\Delta_{ij}}{\det(g_{ij})} = g^{ij} \tag{9}$$

ただし $g \equiv \det g_{ij} = \frac{1}{\det g^{ij}}$ であることに注意する. これより

$$\frac{\partial g}{\partial g_{ij}} = \frac{\partial}{\partial g_{ij}} g_{ij}(-1)^{i+j}\Delta_{ij} = (-1)^{(i+j)}\Delta_{ij} = g g^{ij}$$

と計算され、示された. 続いて $\frac{\partial g}{\partial g^{\mu\nu}} = -g g_{\mu\nu}$ については

$$\frac{\partial\left[\det g^{ij}\right]}{\partial g^{ij}} = \frac{\partial}{\partial g^{ij}} g^{ij}(-1)^{i+j}\Delta^{ij} = (-1)^{i+j}\Delta^{ij} \tag{10}$$

であることと

$$\frac{(-1)^{i+j}\Delta^{ij}}{\det(g^{ij})} = \frac{1}{g^{ij}} = g_{ij} \tag{11}$$

にて

$$\frac{\partial\left[\det g^{ij}\right]}{\partial g^{ij}} = g_{ij} \det\left(g^{ij}\right) \tag{12}$$

を得るが、これはつまり

$$\frac{\partial}{\partial g^{ij}} \frac{1}{g} = \frac{g_{ij}}{g} \tag{13}$$

この左辺は

$$(LHS) = \frac{\partial g}{\partial g^{ij}} \frac{\partial g^{-1}}{\partial g} = \frac{\partial g}{\partial g^{ij}} \left(-\frac{1}{g^2}\right) \tag{14}$$

と変形される. 以上にて

$$\frac{\partial g}{\partial g^{ij}} = -g g_{ij}$$

と示された. 一次近似より

$$\delta \det(g_{ij}) \sim \det(g_{ij} + \delta g_{ij}) - \det(g_{ij}) \tag{15}$$

これは

$$= \det\left(g_{ik}\left(\delta^k{}_j + g^{kl}\delta g_{jl}\right)\right) - \det(g_{ij}) \tag{16}$$

まとめて

$$= g\left(\det\left(\delta^k{}_j + g^{kl}\delta g_{jl}\right) - 1\right)$$

これはすなわち

$$\det\left(\delta^k{}_j + g^{k\lambda}g_{\lambda j}\right) = \begin{vmatrix} 1 + g^{0\lambda}\delta g_{\lambda 0}, & g^{0\lambda}\delta g_{\lambda 1} & g^{0\lambda}\delta g_{\lambda 2} & g^{0\lambda}\delta g_{\lambda 3} \\ \vdots & 1 + g^{1\lambda}\delta g_{\lambda 1} & & \vdots \\ \vdots & & 1 + g^{2\lambda}\delta g_{\lambda 2} & \vdots \\ g^{3\lambda}\delta g_{\lambda 0} & \dots & & 1 + g^{3\lambda}\delta g_{\lambda 3} \end{vmatrix} \tag{17}$$

であるが δ の一次の項のみに注目すると対角成分の積以外は全て消えるので

$$\sim \left(1 + g^{0\lambda}\delta g_{\lambda 0}\right)\left(1 + g^{1\lambda}\delta g_{\lambda 1}\right)\left(1 + g^{2\lambda}\delta g_{\lambda 2}\right)\left(1 + g^{3\lambda}\delta g_{\lambda 3}\right) \tag{18}$$

結局これは

$$\sim 1 + g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \tag{19}$$

とさらに一次近似される. 故に

$$\boxed{\delta \det(g_{ij}) \sim g g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}} \tag{20}$$

得る.

1.3 計算

$$\begin{aligned} \delta\sqrt{-g} = \frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g}\delta g &= -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\delta g \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{-g}} g g^{ij}\delta g_{ij} \\ &= \frac{\sqrt{-g}}{2} g^{ij}\delta g_{ij}. \end{aligned}$$

よって

$$\boxed{\delta\sqrt{-g} = \frac{\sqrt{-g}}{2} g^{ij}\delta g_{ij}} \tag{21}$$

2 計算

以下の Lagrangian 密度のもと

$$\mathcal{L}(g_{\mu\nu}, \varphi, \partial_\mu\varphi) = \frac{1}{2}\left(g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\mu\varphi - m^2\varphi^2\right) \tag{22}$$

作用の変分を計算していく.

$$\begin{aligned} \delta S &= \int dx^4 \delta[\sqrt{-g}\mathcal{L}] \\ &= \int dx^4 [\delta(\sqrt{-g})\mathcal{L} + \sqrt{-g}\delta\mathcal{L}] \end{aligned} \tag{23}$$

ただし $\delta\mathcal{L}$ は Total Derivative で

$$\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}, \varphi + \delta\varphi, \partial_\mu\varphi + \partial_\mu\delta\varphi\right) - \mathcal{L}\left(g_{\mu\nu}, \varphi, \partial_\mu\varphi\right) \tag{24}$$

上の結果のもと、以下のように計算される.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}\varphi + \delta\varphi, \partial_\mu\varphi + \partial_\mu\delta\varphi\right) &= \frac{1}{2}\left\{\left(g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu}\right)\left(\partial_\mu\varphi + \partial_\mu\delta\varphi\right)\left(\partial_\nu\varphi + \partial_\nu\delta\varphi\right) - m^2(\varphi + \delta\varphi)^2\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\left(g^{\mu\nu} - g^{\mu\lambda}g^{\nu k}\delta g_{\lambda k}\right)\left(\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi + \partial_\mu\varphi\partial_\nu\delta\varphi + \partial_\mu\delta\varphi\partial_\nu\varphi\right)\right. \\ &\left. -m^2\varphi^2 - 2m^2\varphi\delta\varphi\right\}\end{aligned} \tag{25}$$

書き直して

$$\begin{aligned}= \mathcal{L}\left(g_{\mu\nu}, \varphi, \partial_\mu\varphi\right) + \frac{1}{2}&\left\{g^{\mu\nu}\left(\partial_\mu\varphi\partial_\nu\delta\varphi + \partial_\mu\delta\varphi\partial_\nu\varphi\right)\right. \\ &- g^{\mu\lambda}g^{\nu k}\delta g_{\lambda k}\left(\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi + \partial_\mu\varphi\partial_\nu\delta\varphi + \partial_\mu\delta\varphi\partial_\nu\varphi\right) \\ &\left. -2m^2\varphi\delta\varphi\right\}\end{aligned}$$

つまり

$$\delta\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left\{g^{\mu\nu}\left(\partial_\mu\varphi\partial_\nu\delta\varphi + \partial_\mu\delta\varphi\partial_\nu\varphi\right) - g^{\mu\lambda}g^{\nu k}\delta g_{\lambda k}\left(\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi + \partial_\mu\varphi\partial_\nu\delta\varphi + \partial_\mu\delta\varphi\partial_\nu\varphi\right) -2m^2\varphi\delta\varphi\right\}$$

さらに δ の 2 次の項を落として (落として良いか...?)

$$= \frac{1}{2}\left\{g^{\mu\nu}\left(\partial_\mu\varphi\partial_\nu\delta\varphi + \partial_\mu\delta\varphi\partial_\nu\varphi\right) - g^{\mu\lambda}g^{\nu k}\delta g_{\lambda k}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - 2m^2\varphi\delta\varphi\right\}. \tag{26}$$

以下計算ミス (念の為残しておく.)

$$
\begin{aligned}
(1) &= \frac{1}{2} g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\delta\varphi \\
&= \frac{1}{2} g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\delta\left(\partial_\nu\varphi\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[\delta\left(g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi\right) - \delta\left(g^{\mu\nu}\right)\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - g^{\mu\nu}\delta\left(\partial_\mu\varphi\right)\partial_\nu\varphi\right] \\
&\to -\frac{1}{2}\left[-g^{\mu\lambda}g^{\nu k}\delta g_{\lambda k}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi + g^{\mu\nu}\delta\left(\partial_\mu\varphi\right)\partial_\nu\varphi\right] \quad (\text{部分積分})
\end{aligned}
$$

<u>ここで部分積分は間違え?????</u> これより第 1 項と第 2 項の和は

$$
\begin{aligned}
(1)+(2) &= \frac{1}{2}\left[g^{\mu\lambda}g^{\nu k}\delta g_{\lambda k}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - g^{\mu\nu}\delta\left(\partial_\mu\varphi\right)\partial_\varphi\varphi + g^{\mu\nu}\delta\left(\partial_\mu\varphi\right)\partial_\nu\varphi\right] \\
&= \frac{1}{2} g^{\mu\lambda}g^{\nu k}\delta g_{\lambda k}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi
\end{aligned}
$$

この結果を代入して

$$
\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\left[g^{\mu\lambda}g^{\nu\lambda}\delta g_{\lambda k}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - g^{\mu\lambda}g^{\nu k}\delta g_{\lambda k}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - 2m^2\varphi\delta\varphi\right] \\
&= -m^2\varphi\delta\varphi
\end{aligned}
$$

また $\delta(\sqrt{-g}) = \frac{\sqrt{-g}}{2} g^{ij}\delta g_{ij}$ であったことを用いて

$$
\begin{aligned}
0 = \delta S &= \int dx^4 \delta[\sqrt{-g}\mathcal{L}] \\
&= \int dx^4 [\delta(\sqrt{-g})\mathcal{L} + \sqrt{-g}\delta\mathcal{L}] \\
&= \int dx^4 \sqrt{-g}\left[\frac{\mathcal{L}}{2} g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} - m^2\varphi\delta\varphi\right]
\end{aligned}
$$

2.1 間違え直し

式 (26) より作用の変分は

$$
\begin{aligned}
\delta S &= \int d^4x [\delta(\sqrt{-g})\mathcal{L} + \sqrt{-g}\delta\mathcal{L}] \\
&= \int d^4x \frac{\sqrt{-g}}{2}\left[g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}\cdot\mathcal{L} + \left\{g^{\mu\nu}\left(\partial_\mu\varphi\partial_\nu\delta\varphi + \partial_\mu\delta\varphi\partial_\nu\varphi\right) - g^{\mu\lambda}g^{\nu\mu}\delta g_{\lambda k}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - 2m^2\varphi\delta\varphi\right\}\right]
\end{aligned}
$$

これはすなわち以下の 5 つの積分である.

$$
\begin{aligned}
A &= \int d^4x \frac{\sqrt{-g}}{2} g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}\mathcal{L} \\
B &= \int d^4x \frac{\sqrt{-g}}{2} g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\delta\left(\partial_\nu\varphi\right) \\
C &= \int d^4x \frac{\sqrt{-g}}{2} g^{\mu\nu}\delta\left(\partial_\mu\varphi\right)\partial_\nu\varphi \\
D &= \int d^4x - \frac{\sqrt{-g}}{2} g^{\mu\lambda}g^{\nu k}\delta g_{\lambda k}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi \\
E &= -\int d^4x \sqrt{-g}\ m^2\varphi\delta\varphi
\end{aligned} \tag{27}
$$

積分 B は表面項を落として

$$
\begin{aligned}
B &= \int dx^4 \frac{\sqrt{-g}}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \delta\left(\partial_\nu \varphi\right) \\
&= \int dx^4 \delta\left[\frac{\sqrt{-g}}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi\right] - \frac{1}{2}\delta(\sqrt{-g}) g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - \frac{\sqrt{-g}}{2} g^{\mu\nu} \delta\left(\partial_\mu \varphi\right) \partial_\nu \varphi \\
&= \int dx^4 \left(-\frac{1}{2}\delta(\sqrt{-g}) g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - \frac{\sqrt{-g}}{2} g^{\mu\nu} \delta\left(\partial_\mu \varphi\right) \partial_\nu \varphi\right)
\end{aligned}
\tag{28}
$$

これより $B+C$ は

$$
\begin{aligned}
B + C &= \int dx^4 - \frac{1}{2}\delta(\sqrt{-g}) g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi \\
&= -\frac{1}{2} \int dx^4 \frac{\sqrt{-g}}{2} g^{ij} \delta g_{ij} \cdot g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi
\end{aligned}
\tag{29}
$$

となる. 積分 E は

$$
\begin{aligned}
E &= -\int dx^4 \sqrt{-g} m^2 \varphi \delta \varphi \\
&= -\frac{m^2}{2} \int dx^4 \left[\delta\left(\sqrt{-g}\varphi^2\right) - \delta(\sqrt{-g})\varphi^2\right] \\
&= \frac{m^2}{2} \int dx^4 \delta(\sqrt{-g})\varphi^2 \\
&= \frac{m^2}{2} \int dx^4 \frac{\sqrt{-g}}{2} g^{ij} \delta g_{ij} \cdot \varphi^2
\end{aligned}
\tag{30}
$$

以上より

$$
\delta S = \int dx^4 \frac{\sqrt{-g}}{2} \left[g^{ij}\mathcal{L} - \frac{g^{ij}}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - g^{\mu i} g^{\nu j} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + \frac{m^2}{2} g^{ij} \varphi^2\right] \delta g_{ij}
\tag{31}
$$

となる. これはつまり

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta S}{\delta g_{ij}(x)} &= \frac{\sqrt{-g}}{2} \left[g^{ij}\left(\mathcal{L} - \frac{g^{\mu\nu}}{2} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + \frac{m^2}{2} \varphi^2\right) - g^{\mu i} g^{\nu j} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi\right] \\
&= \frac{\sqrt{-g}}{2} \left[g^{ij}\left(\underline{\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi} - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 - \underline{\frac{g^{\mu\nu}}{2} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi} + \frac{m^2}{2} \varphi^2\right) - g^{\mu i} g^{\nu j} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi\right] \\
&= -\frac{\sqrt{-g}}{2} g^{\mu i} g^{\nu j} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi
\end{aligned}
$$

エネルギー運動量テンソルは、

$$
T^{ij}(x) = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g_{ij}(x)}
\tag{32}
$$

であったから、これまでの計算が正しいならば

$$
\boxed{T^{ij}(x) = g^{\mu i}(x) g^{\nu j}(x) \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi}
\tag{33}
$$

2.2 Notes

余因子の具体的な計算

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\left[\det g^{\mu\nu}\right]}{\partial g^{00}} &= \begin{vmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{12} & g^{22} & g^{23} \\ g^{13} & g^{23} & g^{33} \end{vmatrix} \\
&= g^{11} g^{22} g^{33} - g^{11}\left(g^{23}\right)^2 - g^{22}\left(g^{13}\right)^2 - g^{33}\left(g^{12}\right)^2
\end{aligned}
$$

2.3 Notes.2

2 階対称テンソルは、いつも直交行列 T で実数の固有値を対角成分にもつ対角行列に対角化できるのであった. それを Q_{ij} とすると

$$Q_{ij} = (T_{ib})^t g_{bc} T_{cj} = g_{\alpha\beta} T_{\alpha i} T_{\beta j}$$

ここで行列式を取れば、行列式の可換性より

$$\begin{aligned}\det(Q_{ij}) &= \det(g_{\alpha\beta} T_{\alpha i} T_{\beta j}) \\ &= \det(g_{\alpha\beta}) \\ &= \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4\end{aligned}$$

と 4 つの実数の固有値の積で表される.

3 本題 (A.Zee)

$g_{\mu\nu}(x)$ を一次近似して

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x) \tag{34}$$

とする. ただし $h_{\mu\nu}$ は微少量であるとしており.

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{35}$$

としている.

ここで

$$S = \int dx^4 \sqrt{-g} \mathcal{L} \Rightarrow \delta S = \int dx^4 \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\delta g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} \tag{36}$$

よりエネルギー運動量テンソルは

$$T^{\mu\nu}(x) = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\delta g_{\mu\nu}} \tag{37}$$

と表される. 作用の一次近似 (Taylor 展開) は

$$S(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) - S(\eta_{\mu\nu}) \sim \left.\frac{\delta S(g_{\mu\nu})}{\delta g_{\mu\nu}}\right|_{g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}} \cdot h_{\mu\nu} \tag{38}$$

であるが

$$\frac{\delta S(g_{\mu\nu})}{\delta g_{\mu\nu}} = \int dx^4 - \frac{\sqrt{-g}}{2} T^{\mu\nu} \overset{g_{\mu\nu} \to \eta_{\mu\nu}}{\longrightarrow} \int dx^4 - \frac{T^{\mu\nu}}{2} \tag{39}$$

であるから

$$S(h_{\mu\nu}) \sim S(h_{\mu\nu} = 0) - \int dx^4 \frac{T^{\mu\nu}}{2} h_{\mu\nu} \tag{40}$$

と近似される.
****

$$\begin{aligned}S &= \int dx^4 \sqrt{-g} \mathcal{L}. \\ &= \int dx^4 (-\det g_{\mu\nu})^{1/2} \frac{1}{2} \left(g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - m^2 \varphi^2\right)\end{aligned} \tag{41}$$

ここで

$$\frac{\det\left(\eta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu}\right)-\det\left(\eta_{\mu\nu}\right)}{h_{\mu\nu}}\sim\left.\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}}\right|_{g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}} \tag{42}$$

であるから

$$\begin{aligned}\det\left(\eta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu}\right)&\sim\det\left(\eta_{\mu\nu}\right)+h_{\mu\nu}\left[\det\left(g_{\mu\nu}\right)g^{\mu\nu}\right]_{g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}}\\&=\det\left(\eta_{\mu\nu}\right)+\det\left(\eta_{\mu\nu}\right)h_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu}\\&=-1-h_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu}\end{aligned} \tag{43}$$

よって

$$\begin{aligned}\sqrt{-\det\left(\eta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu}\right)}&=\sqrt{1+h_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu}}\\&\sim1+\frac{1}{2}h_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu}\end{aligned} \tag{44}$$

を得る. しかるに

$$\begin{aligned}S&=\int dx^4\left(1+\frac{1}{2}h_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu}\right)\frac{1}{2}\left\{\left(\eta^{\mu\nu}+h^{\mu\nu}\right)\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi-m^2\varphi^2\right\}\\&=\int dx^4\left(1+\frac{1}{2}h_{ij}\eta^{ij}\right)\frac{1}{2}\left\{\left(\eta^{\mu\nu}+h^{\mu\nu}\right)\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi-m^2\varphi^2\right\}\\&\sim\int dx^4\frac{1}{2}\left[\left(\eta^{\mu\nu}+h^{\mu\nu}\right)\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi-m^2\varphi^2\right]+\int dx^4\frac{1}{4}h_{ij}\eta^{ij}\left[\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi-m^2\varphi^2\right]\end{aligned} \tag{45}$$

****

$S=S(h_{\mu\nu}(x))$ として Taylor 展開すると