1.10 Symmetry (A.Zee)

Misaki Ohta,University of the Ryukyus *

November 2, 2022

Abstract

N 次特殊直交群 $SO(N)$ 対称性を持った Lagrangian について考察する.

1 $SO(N)$ 対称性の Lagrangian

問 ($SO(2)$ 不変の Lagrangian)

以下で定義されている Lagrangian 密度

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[(\partial\varphi_1)^2 + (\partial\varphi_2)^2\right] - \frac{1}{2}m^2\left(\varphi_1^2+\varphi_2^2\right) - \frac{\lambda}{4}\left(\varphi_1^2+\varphi_2^2\right)^2$$

が以下の直交変換

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1' \\ \varphi_2' \end{pmatrix}.$$

によって不変であることを示せ.

(解答)
Lagrangian 密度の第 1 項は

$$\begin{aligned}(\partial\varphi_1')^2 + (\partial\varphi_2')^2 &= \{\partial(\varphi_1\cos\theta + \varphi_2\sin\theta)\}^2 + \{\partial(-\varphi_1\sin\theta + \varphi_2\cos\theta)\}^2 \\ &= \cos^2\theta\,(\partial\varphi_1)^2 + 2\cos\theta\sin\theta\partial\varphi_1\partial\varphi_2 + \sin^2\theta\,(\partial\varphi_2)^2 \\ &+ \cos^2\theta\,(\partial\varphi_1)^2 - 2\cos\theta\sin\theta\partial\varphi_1\partial\varphi_2 + \sin^2\theta\,(\partial\varphi_2)^2 \\ &= (\partial\varphi_1)^2 + (\partial\varphi_2)^2\end{aligned}$$

次に第 2 項の計算は

$$\begin{aligned}(\varphi_1')^2 + (\varphi_2')^2 &= (\cos\theta\varphi_1 + \sin\theta\varphi_2)^2 + (-\sin\theta\varphi_1 + \cos\theta\varphi_2)^2 \\ &= \left(\cos^2\theta\varphi_1^2 + \sin^2\theta\varphi_2^2 + 2\cos\theta\sin\theta\varphi_1\varphi_2\right) \\ &+ \left(\sin^2\theta\varphi_1^2 + \cos^2\theta\varphi_2^2 - 2\sin\theta\cos\theta\varphi_1\varphi_2\right). \\ &= \varphi_1^2 + \varphi_2^2\end{aligned}$$

同様に第 3 項の計算は第 2 項の結果を用いて即座に示される. 以上にて示された (解答終)

なお一般に n 個の場の以下の Lagrangian 密度

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\left[(\partial\varphi_1)^2 + (\partial\varphi_2)^2 + \cdots + (\partial\varphi_n)^2\right] - \frac{1}{2}m^2\left(\varphi_1^2+\varphi_2^2+\cdots+\varphi_n^2\right) - \frac{\lambda}{4}\left(\varphi_1^2+\varphi_2^2+\cdots+\varphi_n^2\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\left[(\partial\vec{\varphi})^2 - m^2\vec{\varphi}^2\right] - \frac{\lambda}{4}\left(\vec{\varphi}^2\right)^2\end{aligned}$$

*Department of physics, Email: e193225@eve.u-ryukyu.ac.jp or apple.designed@icloud.com

において直交変換 $\overrightarrow{\varphi'} = R\overrightarrow{\varphi}$ に対して不変である. なぜなら

$$\begin{aligned}(\vec{\varphi}')^2 &= (R\vec{\varphi})^T \cdot R\vec{\varphi} \\ &= \vec{\varphi}^T R^T \cdot R\vec{\varphi}\end{aligned}$$

であるが、$R \in SO(N)$ より

$$R^T = R^{-1}$$

でなければいけないから

$$\left(\overrightarrow{\varphi'}\right)^2 = \vec{\varphi}^T \cdot \vec{\varphi} = (\vec{\varphi})^2$$

となり、上で定義される Lagrangian 密度は不変となる.

問

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[(\partial\varphi_1)^2 + (\partial\varphi_2)^2\right] - \frac{1}{2}m^2\left(\varphi_1^2+\varphi_2^2\right) - \frac{\lambda}{4}\left(\varphi_1^2+\varphi_2^2\right)^2$$

を変分して運動方程式 (EOM)

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\partial^2 + m^2 + \lambda\left(\varphi_1^2+\varphi_2^2\right)\right]\varphi_1 = 0 \\ \left[\partial^2 + m^2 + \lambda\left(\varphi_1^2+\varphi_2^2\right)\right]\varphi_2 = 0\end{array}\right.$$

を求めよ.

(解答)
変分 $\varphi_1 \to \varphi_1 + \varepsilon$ によって上の Lagrangian 密度は

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \to& \frac{1}{2}\left[\left\{\partial\left(\varphi_1+\varepsilon\right)\right\}^2 + (\partial\varphi_2)^2\right] - \frac{m^2}{2}\left\{(\varphi_1+\varepsilon)^2 + \varphi_2^2\right\} - \frac{\lambda}{4}\left\{(\varphi_1+\varepsilon)^2+\varphi_2^2\right\}^2 \\ &= \frac{1}{2}\left[(\partial\varphi_1)^2 + 2\partial\varphi_1\partial\varepsilon + (\partial\varphi_2)^2\right] - \frac{m^2}{2}\left(\varphi_1^2 + 2\varphi_1\varepsilon + \varphi_2^2\right) - \frac{\lambda}{4}\left(\varphi_1^2+2\varphi_1\varepsilon+\varphi_2^2\right)^2 \\ &= \mathcal{L} + \partial\varphi_1\partial\varepsilon - m^2\varphi_1\varepsilon - \lambda\left(\varphi_1^2+\varphi_2^2\right)\varphi_1\varepsilon\end{aligned}$$

ただし ε の 2 次の項は 0 とした. ここで $\partial\left(\partial\varphi_1\cdot\varepsilon\right) = \partial^2\varphi_1\cdot\varepsilon + \partial\varphi_1\partial\varepsilon$ を使って変形し、部分積分の項を落として

$$\Rightarrow \mathcal{L} - \left(\partial^2\varphi_1\right)\cdot\varepsilon - m^2\varphi_1\varepsilon - \lambda\left(\varphi_1^2+\varphi_2^2\right)\varphi_1\varepsilon$$

これが元の Lagrangian 密度 $\mathcal{L}$ と等しくなるためには

$$\left[\partial^2 + m^2 + \lambda\left(\varphi_1^2+\varphi_2^2\right)\right]\varphi_1 = 0$$

であれば良い. 同様に $\varphi_2 \to \varphi_2 + \varepsilon$ と変分して二番目の式を得る. 以上にて示された.(解答終)

問

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial\varphi_1\right)^2 - \frac{1}{2}m_1^2\varphi_1^2 - \frac{\lambda_1}{4}\varphi_1^4 + \frac{1}{2}\left(\partial\varphi_2\right)^2 - \frac{1}{2}m_2^2\varphi_2^2 - \frac{\lambda_2}{4}\varphi_2^4 - \frac{\rho}{2}\varphi_1^2\varphi_2^2 + J_1\varphi_1 + J_2\varphi_2$$

この $\lambda_1^1, \lambda_2^1, \rho^1$ の項の散乱を調べよ.

(解答)
生成関数 Z として

$$\begin{aligned}Z\left(\lambda_1,\lambda_2,\rho,J_1,J_2\right) &= \int D\varphi_1 D\varphi_2 e^{i\int d^{(D+1)}x\mathcal{L}} \\ &= \int D\varphi_1 D\varphi_2 e^{i\int d^{(D+1)}x[\frac{1}{2}(\partial\varphi_1)^2 - \frac{1}{2}m_1^2\varphi_1^2 - \frac{\lambda_1}{4}\varphi_1^4 + \frac{1}{2}(\partial\varphi_2)^2 - \frac{1}{2}m_2^2\varphi_2^2 - \frac{\lambda_2}{4}\varphi_2^4 - \frac{\rho}{2}\varphi_1^2\varphi_2^2 + J_1\varphi_1 + J_2\varphi_2]} \\ &= \int D\varphi_1 D\varphi_2 e^{i\int d^{(D+1)}x[-\frac{1}{2}\varphi_1\left(\partial^2+m_1^2\right)\varphi_1 - \frac{1}{2}\varphi_2\left(\partial^2+m_2^2\right)\varphi_2 - \frac{\lambda_1}{4}\varphi_1^4 - \frac{\lambda_2}{4}\varphi_2^4 - \frac{\rho}{2}\varphi_1^2\varphi_2^2 + J_1\varphi_1 + J_2\varphi_2]}\end{aligned}$$

を $\lambda_1, \lambda_2, J_1, J_2, \rho$ 展開することにて調べる.

$$=\int D\varphi_1 e^{-\frac{i}{2}\int d^{(D+1)}x\varphi_1\left(\partial^2+m_1^2\right)\varphi_1}\int D\varphi_2 e^{-\frac{i}{2}\int d^{(D+1)}x\varphi_2\left(\partial^2+m_2^2\right)\varphi_2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(i\int d^{(D+1)}x-\frac{\lambda_1}{4}\varphi_1^4\right)^n$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(i\int d^{(D+1)}x-\frac{\lambda_2}{4}\varphi_2^4\right)^k\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\left(i\int d^{(D+1)}x-\frac{\rho}{2}\varphi_1^2\varphi_2^2\right)^l$$
$$\sum_{u=0}^{\infty}\frac{1}{u!}\left(i\int d^{(D+1)}xJ_1\varphi_1\right)^u\sum_{v=0}^{\infty}\frac{1}{v!}\left(i\int d^{(D+1)}xJ_2\varphi_2\right)^v$$

まず $\lambda^0, \lambda_2^0, \rho^1$ の項は 4 つのソース J_1^2, J_2^2 を選び (この確率振幅を $I(\lambda_1^0, \lambda_2^0, \rho^1, J_1^2, J_2^2)$ とする)

$$\begin{aligned}I(\lambda_1^0, \lambda_2^0, \rho^1, J_1^2, J_2^2) = -i\int dw_1\int dw_2\int dw_3\int dw_4\int dw_5 J_2\left(w_4\right)J_2\left(w_5\right)J_1\left(w_3\right)J_1\left(w_2\right)\\ \int D\varphi_1\varphi_1\left(w_1\right)^2\varphi_1\left(w_2\right)\varphi_1\left(w_3\right)e^{-\frac{i}{2}\int d^{(D+1)}x\varphi_1\left(\partial^2+m_1^2\right)\varphi_1}\\ \int D\varphi_2\varphi_2\left(w_1\right)^2\varphi_2\left(w_4\right)\varphi_2\left(w_5\right)e^{-\frac{i}{2}\int d^{(D+1)}x\varphi_2\left(\partial^2+m_2^2\right)\varphi_2}\end{aligned}$$

ここで Wick の定理より

$$\begin{aligned}=&-iZ(0,0,0,0,0)\int dw_1\cdots dw_5 J_2\left(w_4\right)J_2\left(w_5\right)J_1\left(w_3\right)J_1\left(w_2\right)\\ &D\left(w_1-w_2\right)D\left(w_1-w_3\right)D\left(w_1-w_4\right)D\left(w_1-w_5\right)\end{aligned}$$

これはすなわち場 $(\varphi_1, \varphi_1) \to (\varphi_2, \varphi_2)$ の様な散乱を表している. 同様の計算にて λ^1, J_1^4 は $(\varphi_1, \varphi_1) \to (\varphi_1, \varphi_1)$ などが調べられる.

References

[1] Quantum Field Theory in a Nutshell(A.Zee)